Algèbres de dimension finie dont le carré du radical de la catégorie des modules est nul

par

Saliou LO

mémoire présenté au Département de mathématiques en vue de l'obtention du grade de maître ès sciences (M.Sc.)

FACULTÉ DES SCIENCES
UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE

Sherbrooke, Québec, Canada, juin 2021

Le 02 juin 2021

Le jury a accepté le mémoire de Monsieur Saliou LO dans sa version finale.

Membres du jury :

Professeur Shiping LIU

Directeur de recherche

Département de mathématiques

Professeur Ibrahim ASSEM

Codirecteur de recherche

Département de mathématiques

Professeur Charles PAQUETTE

Codirecteur de recherche

Département de mathématiques

Professeur Juan Carlos BUSTAMANTE

Membre interne

Département de mathématiques

Professeur Thomas BRÜSTLE

Président-rapporteur

Département de mathématiques

SOMMAIRE

Dans ce mémoire, on entend par algèbre toute k-algèbre de dimension finie sur un corps commutatif algébriquement clos k. Si A est une k-algèbre, on entend par A-module tout A-module à gauche de type fini, sauf si spécifié autrement.

Après avoir introduit les notions nécessaires de la théorie des catégories, nous présentons la définition du radical de la catégorie des modules. Par la suite, nous exposons certains concepts de la théorie des représentations des algèbres, notamment les morphismes presque scindés dans le but de démontrer le théorème suivant :

Théorème : Soit $A = kQ/I$, où Q est un carquois connexe et I un idéal admissible de kQ. Alors $rad^2(modA) = 0$ si et seulement si Q se compose d'un point ou d'une flèche entre deux points distincts.

Mots-clés : Catégorie de modules, radical, carquois, morphismes scindés, nilpotent, chemin pré-sectionnel.

REMERCIEMENTS

Louange à Allah, Seigneur de l'univers !

Je voudrais tout d'abord adresser toute ma gratitude à mon directeur de recherche, Shiping LIU, pour sa patience et surtout ses judicieux conseils, qui ont contribué à alimenter ma réflexion. Je le remercie très sincèrement pour sa grande disponibilité ainsi que le soutien financier qu'il m'a offert. J'adresse aussi mes sincères remerciements à mes codirecteurs, Ibrahim ASSEM et Charles PAQUETTE, pour leurs précieux soutiens financiers et les nombreux échanges qui m'ont été si bénéfiques.

Je désire également remercier le Professeur Thomas BRÜSTLE et le Professeur Juan Carlos BUSTAMANTE qui ont acceptés de lire ce mémoire et de faire partie du jury.

Je tiens à montrer ma reconnaissance à tous les professeurs, qui m'ont fourni les outils nécessaires à la réussite de mes études universitaires. Je tiens aussi à remercier l'Institut des Sciences Mathématiques du Québec (I.S.M), pour la bourse d'excellence ainsi que le département de mathématiques pour son financement et de m'avoir accordé la chance de pratiquer le métier d'enseignant des mathématiques sans oublier mes collègues et tous les membres du groupe de recherche en algèbre.

Enfin, je ne pourrais finir ces remerciements sans penser à ma famille dont l'affection, l'amour, le soutien et l'encouragement constants m'ont été d'un grand réconfort et ont contribué à l'aboutissement de ce travail.

Saliou LO

Sherbrooke, mai 2021

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

Soient k un corps et A une k-algèbre de dimension finie. Il a été prouvé au début des années 1990 que A est de représentation finie si et seulement si le radical de la catégorie des A-modules à droite de type fini est nilpotent [9]. Par ailleurs, d'après le lemme de Harada-Sai, cet indice de nilpotence est borné par $2^b - 1$, où b est la dimension maximale des A-modules indécomposables [7]. En particulier, si A est de dimension finie, cette nilpotence est décrite explicitement en termes de degrés d'un nombre fini de morphismes irréductibles.

Le but de ce mémoire est de classifier les algèbres de dimension finie dont le carré du radical de la catégorie des modules est nul. Ainsi, après avoir rappelé, aux chapitres 1 et 2, quelques notions nécessaires sur les catégories, les trois derniers chapitres seront consacrés à la théorie des représentations des algèbres et la théorie d'Auslander-Reiten pour enfin démontrer le résultat principal de nos recherches.

CHAPITRE 1

Catégories

La théorie des catégories est une branche des mathématiques qui a été développée dans les années 1940 par les mathématiciens Samuel Eilenberg et Saunders Mac Lane, puis propagée par Alexander Grothendieck durant les années 1960. Elle permet de généraliser le concept de structures algébriques et d'applications conservant ces structures. Les définitions et résultats énoncés dans ce chapitre sont issus de [1].

1.1 Définition de catégories

L'objectif de cette section est de présenter une introduction à la théorie des catégories dans le but d'étudier plus tard la catégorie de modules, $modA$. Nous n'y présenterons que les notions nécessaires pour la compréhension de ce mémoire.

Définition 1.1.1. *Une* ***catégorie*** $\mathcal{C}$ *est définie par la donnée :*

(1) *d'une classe* $Ob\,\mathcal{C}$*, appelée* ***classe des objets*** *de* $\mathcal{C}$*,*

(2) *pour chaque paire* (X, Y) *d'objets de* $\mathcal{C}$*, d'un ensemble noté* $Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$ *dont les éléments sont appelés* ***morphismes*** *de* X *vers* Y *tel que si* $(X, Y) \neq (X', Y')$*, alors* $Hom_{\mathcal{C}}(X, Y) \cap Hom_{\mathcal{C}}(X', Y')$ *est vide,*

(3) *pour chaque triplet d'objets* (X, Y, Z) *de* $\mathcal{C}$*, d'une application*

$$\begin{array}{cccc} \circ & : & Hom_{\mathcal{C}}(Y, Z) \times Hom_{\mathcal{C}}(X, Y) & \longrightarrow & Hom_{\mathcal{C}}(X, Z) \\ & & (f, g) & \longmapsto & f \circ g \end{array}$$

appelée la ***composition*** *des morphismes de* $\mathcal{C}$ *et satisfaisant aux conditions suivantes :*

(a) *si* $f \in Hom_{\mathcal{C}}(U, V), g \in Hom_{\mathcal{C}}(V, W), h \in Hom_{\mathcal{C}}(W, X)$*, alors* $h(gf) = (hg)f$*,*

(b) *pour chaque objet* X *de* $\mathcal{C}$*, il existe un morphisme* $\mathrm{id}_X \in Hom_{\mathcal{C}}(X, X)$ *appelé* ***morphisme identité*** *de* X *tel que, si* $f \in Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$ *et* $g \in Hom_{\mathcal{C}}(W, X)$*, alors* $f \circ \mathrm{id}_X = f$ *et* $\mathrm{id}_X \circ g = g$*.*

Remarque 1.1.2.

(1) *Un morphisme* $f \in Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$ *d'une catégorie* $\mathcal{C}$ *est noté* $f : X \longrightarrow Y$*. L'objet* X *est appelé le* ***domaine*** *de* f *et l'objet* Y *son* ***codomaine****.*

(2) *Soit* $\mathcal{C}$ *une catégorie. On définit la* ***catégorie opposée*** $\mathcal{C}^*$ *de* $\mathcal{C}$ *de la façon suivante :*

(a) $Ob\ \mathcal{C} = Ob\ \mathcal{C}^*$*,*

(b) *Pour tout couple d'objets* (M, N) *de* $\mathcal{C}$*,* $Hom_{\mathcal{C}^*}(M, N) = Hom_{\mathcal{C}}(N, M)$ *(autrement dit, le sens des morphismes est inversé),*

(c) *La loi de composition sur* $\mathcal{C}^*$*, toujours notée* $\circ$*, est définie de la manière suivante :*

$f^* \circ g^* = (g \circ f)^*$.

(3) *La composition de deux morphismes f et g d'une catégorie $\mathcal{C}$ est souvent notée brièvement fg.*

Exemple 1.1.3.

(1) *La catégorie **Ens** des ensembles admet pour objets les ensembles, pour morphismes les applications et pour composition la composition usuelle des applications.*

(2) *Soit $\langle X, R\rangle$ un ensemble pré-ordonné (c'est-à-dire que l'ensemble X est muni d'une relation R réflexive et transitive). On peut obtenir une catégorie de la façon suivante :*

- (a) *Les objets sont les éléments de X,*
- (b) *Les morphismes sont tels que*

$$Hom_X(x,y) = \begin{cases} (x,y) & si\ xRy, \\ \varnothing & sinon \end{cases}$$

- (c) *Pour toutes paires (x,y) et (y,z), la transitivité du pré-ordre permet de définir une opération de composition $\circ$ car si xRy et yRz, alors xRz. D'où $(y,z)\circ(x,y) = (x,z)$.*

Définition 1.1.4. *Soient $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ deux catégories. On dit que $\mathcal{D}$ est une **sous-catégorie** de $\mathcal{C}$ si*

(1) *tout objet de $\mathcal{D}$ est un objet de $\mathcal{C}$,*

(2) *tout morphisme de $\mathcal{D}$ est un morphisme de $\mathcal{C}$,*

(3) *la composition est la même dans $\mathcal{D}$ et dans $\mathcal{C}$.*

*De plus, si $Hom_{\mathcal{D}}(M,N) = Hom_{\mathcal{C}}(M,N)$, pour tout M, N dans $Ob\mathcal{D}$, on dit que $\mathcal{D}$ est une **sous-catégorie pleine**.*

L'idée d'une application préservant les structures se généralise aux catégories. Ainsi, étant données deux catégories $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$, il faudrait qu'à chaque objet ou morphisme de $\mathcal{C}$, on fasse correspondre un objet ou un morphisme de $\mathcal{D}$. Cette correspondance qui doit être compatible avec la composition des morphismes est établie par un foncteur [1].

Définition 1.1.5. *Soient $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ deux catégories.*

(1) *Un **foncteur covariant** $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ est défini par la donnée pour chaque objet M de $\mathcal{C}$ d'un objet $F(M)$ de $\mathcal{D}$, et pour chaque morphisme $f : M \longrightarrow N$ de $\mathcal{C}$ d'un morphisme $F(f) : F(M) \longrightarrow F(N)$ de $\mathcal{D}$ tel que :*

(a) *Si gf est défini dans $\mathcal{C}$, alors $F(g)F(f)$ est défini dans $\mathcal{D}$ et $F(gf) = F(g)F(f)$.*

(b) *Pour tout objet M de $\mathcal{C}$, $F(\mathrm{id}_M) = \mathrm{id}_{F(M)}$.*

(2) *Un **foncteur contravariant** $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ est défini par la donnée pour chaque objet M de $\mathcal{C}$ d'un objet $F(M)$ de $\mathcal{D}$, et pour chaque morphisme $f : M \longrightarrow N$ de $\mathcal{C}$ d'un morphisme $F(f) : F(N) \longrightarrow F(M)$ de $\mathcal{D}$ tel que :*

(a) *Si gf est défini dans $\mathcal{C}$, alors $F(f)F(g)$ est défini dans $\mathcal{D}$ et $F(gf) = F(f)F(g)$.*

(b) *Pour tout objet M de $\mathcal{C}$, $F(\mathrm{id}_M) = \mathrm{id}_{F(M)}$.*

Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux catégories. Tout foncteur covariant $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ induit, pour chaque paire d'objets (X, Y) de $\mathcal{C}$, une application

$$\begin{array}{cccc} F : & Hom_{\mathcal{C}}(X,Y) & \longrightarrow & Hom_{\mathcal{D}}(FX, FY) \\ & f & \longmapsto & Ff \end{array}$$

Le foncteur F est dit ***fidèle*** si cette application est injective, pour tous X, Y ; ***plein*** si elle est surjective, pour tous X, Y.

Remarque 1.1.6. *Une catégorie $\mathcal{C}$ est dite **concrète** s'il existe un foncteur fidèle $\mathcal{C} \longrightarrow Ens$ appelé foncteur oubli.*

Étant donnée une loi de composition dans une structure mathématique, on s'intéresse souvent aux éléments simplifiables par rapport à cette loi. Dans la plupart des catégories concrètes, il s'agit d'une généralisation des concepts d'injection, de surjection et d'isomorphisme.

Définition 1.1.7. *Un morphisme $f : M \longrightarrow N$ d'une catégorie $\mathcal{C}$ est appelé*

(1) *un **monomorphisme** si pour tout objet L de $\mathcal{C}$ et tout couple de morphismes $g, h : L \longrightarrow M$, on a $f \circ g = f \circ h \implies g = h$.*

(2) *un **épimorphisme** si pour tout objet L de $\mathcal{C}$ et tout couple de morphismes $g, h : N \longrightarrow L$, on a $g \circ f = h \circ f \implies g = h$.*

(3) *un **isomorphisme** s'il existe un morphisme $g : N \longrightarrow M$ tel que $g \circ f = \mathrm{id}_M$ et $f \circ g = \mathrm{id}_N$.*

Définition 1.1.8. *Soient $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ deux catégories et $F, G : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ deux foncteurs. Soit $\phi : F \longrightarrow G$ un morphisme fonctoriel. On dit que ϕ est un **isomorphisme fonctoriel** si ϕ_X est un isomorphisme pour chaque objet X de $\mathcal{C}$.*

Définition 1.1.9. *Soit $(M_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une famille d'objets d'une catégorie $\mathcal{C}$. Un **produit** de cette famille est la donnée d'un objet M et d'une famille de morphismes $(p_\lambda : M \longrightarrow$*

$M_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ telle que, si $(M', (p'_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ est la donnée d'un autre objet M' et d'une autre famille de morphismes $(p'_\lambda : M' \longrightarrow M_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, alors il existe un unique morphisme $f : M' \longrightarrow M$ tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "p_\lambda"] & M_\lambda \\ M' \arrow[u, dotted, "f"] \arrow[ur, "p'_\lambda"'] & \end{tikzcd}$$

$p_\lambda f = p'_\lambda$ pour tout λ dans Λ. On note $M = \prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$.

Définition 1.1.10. *Soit $(M_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une famille d'objets d'une catégorie $\mathcal{C}$. Un **co-produit** de cette famille est la donnée d'un objet M et d'une famille de morphismes $(q_\lambda : M_\lambda \longrightarrow M)_{\lambda\in\Lambda}$ telle que, si $(M', (q'_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ est la donnée d'un autre objet M' et d'une autre famille de morphismes $(q'_\lambda : M_\lambda \longrightarrow M')_{\lambda\in\Lambda}$, alors il existe un unique morphisme $f : M \longrightarrow M'$ tel que le diagramme suivant soit commutatif :*

$$\begin{tikzcd} M_\lambda \arrow[r, "q_\lambda"] \arrow[d, "q'_\lambda"'] & M \arrow[dl, dotted, "f"] \\ M' & \end{tikzcd}$$

$f q_\lambda = q'_\lambda$ pour tout λ dans Λ. On note $M = \amalg_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$.

Définition 1.1.11. *Soit k un corps. Une catégorie $\mathcal{C}$ est dite k-**linéaire** si :*

(1) *Pour tous objets X, Y de $\mathcal{C}$, $Hom_{\mathcal{C}}(X,Y)$ est un k-espace vectoriel,*

(2) *La composition des morphismes est k-bilinéaire, c'est-à-dire que, pour tous morphismes f, f_1, $f_2 \in Hom_{\mathcal{C}}(X,Y)$, g, g_1, $g_2 \in Hom_{\mathcal{C}}(Y,Z)$ et tous scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \in k$, on a :*

$$g \circ (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = \lambda_1 (g \circ f_1) + \lambda_2 (g \circ f_2)$$
$$(\mu_1 g_1 + \mu_2 g_2) \circ f = \mu_1 (g_1 \circ f) + \mu_2 (g_2 \circ f),$$

(3) *Toute famille finie d'objets de $\mathcal{C}$ admet un produit et un co-produit dans $\mathcal{C}$.*

Définition 1.1.12. *Soit $\{X_1, X_2, \dots X_n\}$ une famille finie d'objets d'une catégorie k-linéaire $\mathcal{C}$. Un **biproduit** de cette famille est la donnée d'un objet X et de morphismes $p_i : X \longrightarrow X_i$, $q_i : X_i \longrightarrow X$, où $1 \leq i \leq n$, tels que*

(1) $\sum\limits_{i=1}^{n} q_i p_i = \mathrm{id}_X$,

(2) $p_i q_j = 0$ *si* $i \neq j$ *et* $p_i q_i = \mathrm{id}_{X_i}$ *pour tout* i

Remarque 1.1.13. *Un coproduit de $X_1, \dots, X_n$ dans une catégorie k-linéaire s'appelle **somme directe**, noté $X_1 \oplus \cdots \oplus X_n$.*

Définition 1.1.14. *Soit X un objet d'une catégorie k-linéaire $\mathcal{C}$. Un **sous-objet** de X est une paire (Y, f) telle que $f : Y \longrightarrow X$ est un monomorphisme, appelé l'inclusion de Y dans X.*

Définition 1.1.15. *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie k-linéaire. On dit qu'un sous-objet N de M est un **facteur direct** s'il existe un sous-objet L de M tel que $M \cong N \oplus L$.*

Définition 1.1.16. *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie k-linéaire.*

(1) *Un morphisme $f : M \longrightarrow N$ de $\mathcal{C}$ est appelé une **section** s'il existe un morphisme $g : N \longrightarrow M$ de $\mathcal{C}$ tel que $gf = \mathrm{id}_M$.*

(2) *Un morphisme $f : M \longrightarrow N$ de $\mathcal{C}$ est appelé une **rétraction** s'il existe un morphisme $g : N \longrightarrow M$ de $\mathcal{C}$ tel que $fg = \mathrm{id}_N$.*

Lemme 1.1.17. *Soient $\mathcal{C}$ une catégorie k-linéaire, $f : M \longrightarrow N$ et $g : N \longrightarrow L$ des morphismes dans $\mathcal{C}$.*

(1) *Si f, g sont des sections, alors gf est une section.*

(2) *Si f, g sont des rétractions, alors gf est une rétraction.*

Démonstration. (1) Supposons qu'il existe $f' : N \longrightarrow M$ et $g' : L \longrightarrow N$ tels que $f'f = \mathrm{id}_M$ et $g'g = \mathrm{id}_N$. Alors, $(f'g')(gf) = f'f = \mathrm{id}_M$. D'où gf est une section.

(2) Supposons qu'il existe $f' : N \longrightarrow M$ et $g' : L \longrightarrow N$ tels que $ff' = \mathrm{id}_N$ et $gg' = \mathrm{id}_L$. Alors, $(gf)(f'g') = gg' = \mathrm{id}_L$. D'où gf est une rétraction.

□

Lemme 1.1.18. *Soit $f : M \longrightarrow N$ un morphisme dans une catégorie k-linéaire $\mathcal{C}$.*

(1) *Si f est une section, alors f est un monomorphisme.*

(2) *Si f est une rétraction, alors f est un épimorphisme.*

Démonstration. (1) Si $f : M \longrightarrow N$ est une section, alors il existe $g : N \longrightarrow M$ tel que $gf = \mathrm{id}_M$. Soient $h, h' : L \longrightarrow M$ des morphismes tels que $fh = fh'$. On a $gfh = gfh'$. Donc $\mathrm{id}_M \circ h = \mathrm{id}_M \circ h'$. D'où $h = h'$.

(2) Si $f : M \longrightarrow N$ une rétraction, alors il existe $g : N \longrightarrow M$ tel que $fg = \mathrm{id}_N$. Soient $h, h' : N \longrightarrow L$ des morphismes tels que $hf = h'f$. On a $hfg = h'fg$. Donc $h \circ \mathrm{id}_N = h' \circ \mathrm{id}_N$. D'où $h = h'$.

□

Définition 1.1.19. *Soient $\mathcal{C}$ une catégorie k-linéaire et $f : M \longrightarrow N$ un morphisme dans $\mathcal{C}$.*

(1) *Un **noyau** de f est une paire (U, u), où U est un objet de $\mathcal{C}$ et $u : U \longrightarrow M$ un morphisme tel que :*

(a) $fu = 0$.

(b) *Si $u' : U' \longrightarrow M$ est un morphisme tel que $fu' = 0$, il existe un unique morphisme $g : U' \longrightarrow U$ tel que $u' = ug$.*

On note $U = Ker(f)$ et $u = ker(f)$.

(2) *Un **conoyau** de f est une paire (V, v), où V est un objet de $\mathcal{C}$ et $v : N \longrightarrow V$ un morphisme tel que :*

(a) $vf = 0$.

(b) *Si $v' : N \longrightarrow V'$ est un morphisme tel que $v'f = 0$, il existe un morphisme $h : V \longrightarrow V'$ tel que $v' = hv$.*

On note $V = Coker(f)$ et $v = coker(f)$.

(3) *On définit **l'image** de f, notée $Im(f)$, par $Im(f) = Ker(coker(f))$ et la **co-image** de f, notée $Coim(f)$, par $Coim(f) = Coker(ker(f))$.*

Définition 1.1.20. *Une catégorie k-linéaire $\mathcal{C}$ est dite **abélienne** si :*

(1) *il existe un objet 0 dans $\mathcal{C}$,*

(2) *les produits et coproduits existent dans $\mathcal{C}$,*

(3) *tout morphisme de $\mathcal{C}$ admet un noyau et un conoyau,*

(4) *tous les monomorphismes de $\mathcal{C}$ sont des noyaux, tous les épimorphismes sont des conoyaux.*

1.2 Idéaux dans une catégorie k-linéaire

Afin de pouvoir définir ce qu'est le radical d'une catégorie k-linéaire, nous aimerions définir la notion d'idéal qui joue un rôle de premier plan.

Définition 1.2.1. *Un* ***idéal bilatère*** $\mathcal{I}$ *dans une catégorie* k*-linéaire* $\mathcal{C}$ *est la donnée, pour tout paire* (M, N) *d'objets de* $\mathcal{C}$*, d'un sous-espace* $\mathcal{I}(M, N)$ *de* $Hom_{\mathcal{C}}(M, N)$ *tel que*

(1) *Pour tous* $f \in Hom_{\mathcal{C}}(M, N)$ *et* $g \in \mathcal{I}(Y, M)$*,* $f \circ g \in \mathcal{I}(Y, N)$*,*

(2) *Pour tous* $f \in Hom_{\mathcal{C}}(M, N)$ *et* $h \in \mathcal{I}(N, X)$*,* $h \circ f \in \mathcal{I}(M, X)$*.*

Définition 1.2.2. *Soient* $\mathcal{C}$ *une catégorie* k*-linéaire et* $\mathcal{I}$ *un idéal bilatère de* $\mathcal{C}$*. Pour tout* $n \geq 1$*, on définit* $\mathcal{I}^n$ *comme étant l'idéal de* f *tel que pour toute paire d'objets* (X, Y) *l'ensemble* $\mathcal{I}^n(X, Y)$ *soit constitué de toutes les sommes finies* $\sum_{i=1}^{m} f_{i1} \dots f_{in}$*, où* $m \geq 1$*,* $f_{ij} \in \mathcal{I}$*.*

Soient $\mathcal{C}$ une catégorie k-linéaire et $f : L \longrightarrow M$ un morphisme. Si $L = \bigoplus_{j=1}^{n} L_j$ et $M = \bigoplus_{i=1}^{m} M_i$, alors f s'écrit comme suit :

$$f = [f_{ij}] = \begin{bmatrix} f_{11} & \cdots & f_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{m1} & \cdots & f_{mn} \end{bmatrix}$$

où $f_{ij} = p'_i f q_j$ avec $p'_i : M \longrightarrow M_i$ la projection canonique et $q_j : L_j \longrightarrow L$ l'injecsion canonique.

Proposition 1.2.3. *Soit* $\mathcal{C}$ *une catégorie* k*-linéaire avec* $\mathcal{I}$ *un idéal. Soit* $f = [f_{ij}]_{m\times n} : L \longrightarrow M$ *un morphisme, où* $L = \bigoplus_{j=1}^{n} L_j$ *et* $M = \bigoplus_{i=1}^{m} M_i$. *Alors,*

(1) $f = 0$ *si et seulement si,* $f_{ij} = 0$, *pour tout* i, j.

(2) $f \in \mathcal{I}(L, M)$ *si et seulement si,* $f_{ij} \in \mathcal{I}(L_j, M_i)$, *pour tout* i, j.

Démonstration. Soient $p_j : L_j \longrightarrow L$, $q_j : L \longrightarrow L_j$, $p'_i : M \longrightarrow M_i$ et $q'_i : M_i \longrightarrow M$ les projections et injections associées à L et M. Alors $f = \mathrm{id}_M f \mathrm{id}_L = (\sum_{i=1}^{m} q'_i p'_i) f (\sum_{j=1}^{n} q_j p_j) = \sum_{i,j} q'_i p'_i f q_j p_j = \sum_{i,j} q'_i (p'_i f q_j) p_j = \sum_{i=1}^{m} q'_i f_{ij} \sum_{j=1}^{n} p_j = \sum_{i,j} q'_i f_{ij} p_j$.

(1) *Nécessité.* Si $f = 0$, alors $f_{ij} = p'_i f p_j = 0$.

Suffisance. Si $f_{ij} = 0$, alors $f = \sum_{i,j} q'_i f_{ij} p_j = 0$.

(2) *Nécessité.* Supposons que $f \in \mathcal{I}(L, M)$. Comme $\mathcal{I}(L, M)$ est un idéal bilatère, alors $f_{ij} = p'_i f q_j$ est dans $\mathcal{I}(L_j, M_i)$, pour tout $1 \le j \le n$, $1 \le i \le m$.

Suffisance. Supposons que $f_{ij} \in \mathcal{I}(L_j, M_i)$. Comme $f = \sum_{i,j} q'_i f_{ij} p_j$ et $\mathcal{I}(L_j, M_i)$ est un idéal, f est dans $\mathcal{I}(L, M)$ pour tout $1 \le j \le n$, $1 \le i \le m$.

□

1.3 Radical d'une catégorie k-linéaire

La notion d'idéaux dans une catégorie k-linéaire que nous présentons plus haut est essentielle pour définir le radical d'une catégorie k-linéaire.

Définition 1.3.1. *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie k-linéaire. Le* **radical** $rad_{\mathcal{C}}$ *de $\mathcal{C}$ est tel que, pour chaque paire d'objet (M, N) de $\mathcal{C}$, $rad_{\mathcal{C}}(M, N)$ se compose des morphismes $f : M \longrightarrow N$ dans $\mathcal{C}$ tel que $\mathrm{id}_M - gf : M \longrightarrow M$ soit une rétraction pour tout morphisme $g : N \longrightarrow M$.*

Proposition 1.3.2. *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie k-linéaire.*

(1) *Le radical $rad_{\mathcal{C}}$ est un idéal de $\mathcal{C}$.*

(2) *Un morphisme $f : M \longrightarrow N$ de $\mathcal{C}$ est dans $rad_{\mathcal{C}}$ si et seulement si,* $\mathrm{id}_M - gf$ *est inversible pour tout $g : N \longrightarrow M$.*

Démonstration. (1) Il est clair que $0 \in rad_{\mathcal{C}}(M, N)$ et que si $f \in rad_{\mathcal{C}}(M, N)$ et $\alpha \in k$ alors $\alpha f \in rad_{\mathcal{C}}(M, N)$. Soit $f, f' \in rad_{\mathcal{C}}(M, N)$. Comme pour tout $g : N \longrightarrow M$, il existe h tel que $(\mathrm{id}_M - gf)h = \mathrm{id}_M$ on a $(\mathrm{id}_M - gf)(\mathrm{id}_M - hgf') = \mathrm{id}_M - hgf' - gf + (gfh)gf' = \mathrm{id}_M - hgf' - gf + (h - \mathrm{id}_M)gf' = \mathrm{id}_M - gf - gf' = \mathrm{id}_M - g(f + f')$. Or la composition de deux rétractions est une rétraction. Donc, $f + f' \in rad_{\mathcal{C}}(M, N)$.

Soient $f \in rad_{\mathcal{C}}(M, N)$, $u : N \longrightarrow Y$. Alors, pour tout $g : Y \longrightarrow M$, $\mathrm{id}_M - g(uf) = \mathrm{id}_M - (gu)f$ est une rétraction. Donc $uf \in rad_{\mathcal{C}}(M, Y)$. Soit $v : X \longrightarrow M$. Comme $f \in rad_{\mathcal{C}}(M, N)$, pour tout $g : N \longrightarrow X$, $\mathrm{id}_M - vgf$ est une rétraction. Donc, il existe un h tel que $(\mathrm{id}_M - vgf)h = \mathrm{id}_M$. Alors, $(\mathrm{id}_X - gfv)(\mathrm{id}_X + gfhv) = \mathrm{id}_X - gfv + gfhv - gfvgfhv = \mathrm{id}_X - gfv + gf(\mathrm{id}_A - vgf)hv = \mathrm{id}_X - gfv + gf\mathrm{id}_A v = \mathrm{id}_X$. Donc $\mathrm{id}_X - gfv$ est une rétraction. D'où $fv \in rad_{\mathcal{C}}(X, N)$.

(2) *Nécessité.* Supposons que f est dans $rad_{\mathcal{C}}$. Alors il existe un morphisme h tel que $(\mathrm{id}_M - gf)h = \mathrm{id}_M$. Donc, $h = \mathrm{id}_M - g(-fh)$. D'après (1), $-fh \in rad_{\mathcal{C}}$ donc $h = \mathrm{id}_M - g(-fh)$ est une rétraction. Mais h est aussi une section, et donc inversible. Alors $\mathrm{id}_M - gf = h^{-1}$ est inversible.

Suffisance. Supposons que $\mathrm{id}_M - gf$ est inversible. Alors c'est une rétraction. D'où $f \in rad_{\mathcal{C}}$.

□

Lemme 1.3.3. *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie k-linéaire avec $f \in rad_{\mathcal{C}}(M, N)$.*

(1) *Si M est non nul, alors f n'est pas une section.*

(2) *Si N est non nul, alors f n'est pas une rétraction.*

Démonstration. (1) Supposons que M est non nul. Si f est une section, alors il existe $f' : N \longrightarrow M$ tel que $f'f = \mathrm{id}_M$. Donc $\mathrm{id}_M - f'f = 0$. Ce qui est impossible car M est non nul. Donc f n'est pas une section.

(2) Supposons que N est non nul. Si f est une rétraction, alors il existe $f' : N \longrightarrow M$ tel que $ff' = \mathrm{id}_N$. Donc $\mathrm{id}_N - ff' = 0$. Ce qui est impossible car N est non nul. Donc f n'est pas une rétraction.

□

CHAPITRE 2

Catégorie de modules

Dans ce chapitre, nous introduisons les différents objets d'une catégorie de modules. Pour des usages futurs dans diverses situations, nous y rappelons les concepts de modules projectifs, injectifs, simples et semi-simples dans le but d'introduire, plus tard, le radical d'une catégorie de modules pour, enfin, énoncer le premier résultat de ce mémoire.

Dans la suite de cette section, A est une k-algèbre associative et unifère, $ModA$ est la catégorie des A-modules à gauche admettant pour objets les A-modules à gauche, pour morphismes les applications A-linéaires et pour composition la composition usuelle des applications. On note $modA$ la sous-catégorie de $ModA$ formée des A-modules à gauche de type fini. Les définitions et résultats sont issus de [1, 3, 12].

2.1 Morphismes scindés et suites scindées

Avant de pouvoir étudier, dans le chapitre 4, le concept de morphismes presque scindés ainsi que celui de suites presque scindées, nous introduisons dans cette section quelques nouvelles notions, en particulier celles de morphismes scindés et de suites scindées.

Définition 2.1.1. *Un morphisme $f : M \longrightarrow N$ dans mod$A$ est dit*

(1) ***scindé à gauche*** *si tout morphisme $g : M \longrightarrow X$ se factorise par f.*

(2) ***scindé à droite*** *si tout morphisme $h : Y \longrightarrow N$ se factorise par f.*

Lemme 2.1.2. *Soit $f : M \longrightarrow N$ un morphisme dans mod$A$.*

(1) *f est scindé à gauche si et seulement si f est une section.*

(2) *f est scindé à droite si et seulement si f est une rétraction.*

Démonstration. (1) *Nécessité.* Supposons que f est scindé à gauche. Considérant $\mathrm{id}_M : M \longrightarrow M$, il existe $h : N \longrightarrow M$ tel que $\mathrm{id}_M = hf$. Donc f est une section.

Suffisance. Supposons que f est une section. Alors, il existe $h : N \longrightarrow M$ tel que $hf = \mathrm{id}_M$. Soit $g : M \longrightarrow X$ un morphisme. On a $g = g \circ \mathrm{id}_M = (gh)f$, avec $gh : N \longrightarrow X$. Donc f est scindé à gauche.

(2) *Nécessité.* Supposons que f est scindé à droite. Considérant $\mathrm{id}_N : N \longrightarrow N$, il existe $h : N \longrightarrow M$ tel que $\mathrm{id}_N = fh$. Donc f est une rétraction.

Suffisance. Supposons que f est une rétraction. Alors, il existe $h : N \longrightarrow M$ tel que $fh = \mathrm{id}_N$. Soit $g : Y \longrightarrow N$ un morphisme. On a $g = \mathrm{id}_N \circ g = f(hg)$, avec $hg : Y \longrightarrow M$. Donc f est scindé à droite.

$\square$

Définition 2.1.3. *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie abélienne Une suite de A-modules et de morphismes de $\mathcal{C}$* $\dots \longrightarrow M_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i-1} \longrightarrow \dots$ *est dite est **exacte** en M_i si $Im(f_{i+1}) = Ker(f_i)$. Elle est dite exacte si elle l'est en chaque M_i.*

Lemme 2.1.4. *Soient $f : X \longrightarrow Y$ et $g : Y \longrightarrow X$ des morphismes dans modA. Si $gf = \mathrm{id}_X$, alors $Y = Im(f) \oplus Ker(g)$.*

Démonstration. Soit $y \in Y$. On a $y = f(g(y)) + (y - f(g(y)))$ avec $f(g(y)) \in Im(f)$. De plus, $g(y - f(g(y))) = g(y) - 1_X \circ g(y) = 0$. Donc $y - f(g(y)) \in Ker(g)$. D'où $Y = Im(f) + Ker(g)$. Soit $y \in Im(f) \cap Ker(g)$. Alors, $y = f(x)$ et $g(y) = 0$ avec $x \in X$. Ce qui implique que $0 = g(f(x)) = x$ et donc $y = f(0) = 0$. D'où $Im(f) \cap Ker(g) = \{0\}$.

□

Lemme 2.1.5. *Soit*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "v"] & Z \arrow[r] \arrow[d, "w"] & 0 \\
0 \arrow[r] & X' \arrow[r, "f'"] & Y' \arrow[r, "g'"] & Z' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

un diagramme commutatif de A-modules avec u, v, w des isomorphismes. Alors, la ligne d'en haut est exacte si et seulement si celle d'en bas est exacte.

Démonstration. *Nécessité.* Supposons que la suite d'en haut est exacte. Par la commutativité du diagramme, $f' = vfu^{-1}$ et $g' = wgv^{-1}$. Alors f' est un monomorphisme car f, v et u^{-1} sont des monomorphismes. De même, g' est un épimorphisme comme composé d'épimorphismes. Soit $y' \in Imf'$. Alors il existe $x' \in X'$ tel que $f'(x') = y'$. Ce qui implique

que $g'(y') = g'(f'(x'))$. Or $g'(f'(x')) = (wgv^{-1}) \circ (vfu^{-1})(x') = (wg) \circ (fu^{-1})(x') = 0$ car $g \circ f = 0$. Donc $g'(y') = 0$. D'où $Imf' \subseteq Kerg'$. Soit $y' \in Kerg'$. Comme v est un isomorphisme, il existe $y \in Y$ tel que $v^{-1}(y') = y$. Donc $g(v^{-1}(y')) = w^{-1}g'(y') = 0$ car $g = w^{-1}g'v$ et $y' \in Kerg'$. Alors $v^{-1}(y') \in Kerg$. Or $Kerg = Imf$. Donc $v^{-1}(y') \in Imf$. Alors il existe $x \in X$ tel $f(x) = v^{-1}(y')$. Ce qui implique que $vf(x) = y'$. Donc $f'u(x) = y'$ car $vf = f'u$. D'où l'existence de $u(x) \in X'$ tel que $f'(u(x)) = y'$. Donc $y' \in Imf'$. D'où $Kerg' \subseteq Imf'$.

Suffisance. Cela suit de ce que l'inverse d'un isomorphisme est un isomorphisme.

$\square$

Définition 2.1.6. *Une suite exacte courte* $0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$ *dans* $modA$ *est dite* ***scindée*** *s'il existe un isomorphisme* $h : Y \longrightarrow X \bigoplus Z$ *tel que le diagramme*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{id}_X"'] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h"'] & Z \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}_Z"] & 0 \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "\begin{bmatrix}\mathrm{id}_X \\ 0\end{bmatrix}"] & X \bigoplus Z \arrow[r, "{[0\ \mathrm{id}_Z]}"] & Z \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

soit commutatif.

Lemme 2.1.7. *Soit* $0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$ *une suite exacte courte dans* $modA$. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) *La suite est scindée.*

(2) f *est scindé à gauche.*

(3) g *est scindé à droite.*

(4) f *est scindé à gauche et* g *est scindé à droite.*

Démonstration. (1) implique (2) : Supposons que la suite $0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$ est scindée. Notons $q_1 : X \longrightarrow X \oplus Z$, $q_2 : Z \longrightarrow X \oplus Z$ les injections canoniques et $p_1 : X \oplus Z \longrightarrow X$, $p_2 : X \oplus Z \longrightarrow Z$ les projections canoniques. Soit $f' : Y \longrightarrow X$ tel que $f' = p_1 h$, avec $h : Y \longrightarrow X \oplus Z$. Alors, $f'f = p_1 h f = p_1 q_1 = \mathrm{id}_X$. Donc f est une section.

(2) implique (3) : Soit $f' : Y \longrightarrow X$ tel que $f'f = \mathrm{id}_X$. D'après le **lemme 2.1.4**, $Y = Im(g) \oplus Ker(f')$. On construit un morphisme $g' : Z \longrightarrow Y$ dans $modA$. Étant donné $z \in Z$, comme g est un épimorphisme, il existe $y \in Y$ tel que $z = g(y)$. Posons $y = y_1 + y_2$, avec $y_1 \in Im(g)$ et $y_2 \in Ker(f')$. Définissons

$$\begin{array}{cccc} g' & : & Z & \longrightarrow & Y \\ & & z & \longmapsto & y_2 \end{array}$$

On prétend que g' est correctement défini. En effet, soit $y' \in Y$ tel que $z = g(y')$. Si $y' = y'_1 + y'_2$, avec $y'_1 \in Im(g)$ et $y'_2 \in Ker(f')$. Ainsi, $g(y_2) = g(y'_2)$ implique que $g(y_2 - y'_2) = 0$. Donc $y_2 - y'_2 \in Ker(g) = Im(f)$. Or $y_2, y'_2 \in Ker(f')$. Par conséquent, $y_2 - y'_2 \in Im(f) \bigcap Ker(f')$. Comme $Im(f) \oplus Ker(f')$, $Im(f) \bigcap Ker(f') = 0$. D'où $y_2 = y'_2$. Comme $g(y) = z$, $g(y_1) + g(y_2) = z$. Or $y_1 \in Ker(g)$. Donc $g(y_2) = z$. Donc g' est correctement défini. Donc $g(g'(z)) = z = \mathrm{id}_Z(z)$. Alors $gg' = \mathrm{id}_Z$. Donc g est une rétraction.

(3) implique (4) : Soit $g' : Z \longrightarrow Y$ tel que $gg' = \mathrm{id}_Z$. D'après le **lemme 2.1.4**, $Y = Ker(g) \oplus Im(g') = Im(f) \oplus Im(g')$. Donc pour tout $y \in Y$, il existe des éléments uniques $y_1 \in Im(f)$ et $y_2 \in Im(g')$ tels que $y = y_1 + y_2$. Comme f est injective, il existe un unique $x \in X$ tel que $f(x) = y_1$. Posons $f'(y) = x$. Ceci donne une application A-linéaire

$$\begin{array}{cccc} f' & : & Y & \longrightarrow & X \\ & & y & \longmapsto & x \end{array}$$

Pour tout $x \in X$, posons $y = f(x) \in Y$. Comme $y = f(x) + 0$, avec $f(x) \in Im(f)$ et $0 \in Im(g')$, par définition, $f'(y) = x$. Ainsi, $(f'f)(x) = f'(y) = x$. Donc $f'f = \mathrm{id}_X$. D'où f

est une section.

(4) implique (1) : Supposons qu'il existe $f' : Y \longrightarrow X$ et $g' : Z \longrightarrow Y$ tels que $f'f = \mathrm{id}_X$ et $gg' = \mathrm{id}_Z$. Alors, d'après le **lemme 1.1.18**, f et g' sont injectives. Comme on a vu ci-haut, $Y = Im(f) \oplus Im(g')$. Donc pour tout $y \in Y$, il existe des éléments uniques $y_1 \in Im(f)$ et $y_2 \in Im(g')$ tel que $y = y_1 + y_2$. Comme f et g' sont injectives, il existe unique $x \in X$ et $z \in Z$ tels que $y_1 = f(x)$ et $y_2 = g'(z)$. C'est-à-dire que $y = f(x) + g'(z)$. Ainsi, on définit

$$\begin{array}{cccc} h \ : & Y & \longrightarrow & X \bigoplus Y \\ & y & \longmapsto & (x, z) \end{array}$$

où $x \in X$ et $z \in Z$ tels que $y = f(x) + g'(z)$. Soient $y, y' \in Y$. Par définition, $h(y) = (x, z)$, avec $y = f'(x) + g'(z)$, et $h(y') = (x', z')$, avec $y' = f'(x') + g'(z')$.

Supposons que $h(y) = h(y')$. C'est-à-dire, $x = x'$ et $z = z'$. D'où, $y = f(x) + g'(z) = f(x') + g'(z') = y'$. Donc h est injective.

Pour tout couple $(x, z) \in X \bigoplus Z$, $y = f(x) + g'(z) \in Im(f) \oplus Im(g')$, avec $Im(f), Im(g') \in Y$. Ainsi, $y \in Y$. Donc $h(y) = (x, z)$. D'où h est surjective.

Par conséquent, h est bijective.

Il reste à vérifier que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{id}_X"'] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h"'] & Z \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}_Z"] & 0 \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "\begin{bmatrix} \mathrm{id}_X \\ 0 \end{bmatrix}"] & X \bigoplus Z \arrow[r, "{[0 \ \mathrm{id}_Z]}"] & Z \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Pour tout $x \in X$, comme $f(x) = f(x) + g'(0)$, on a $hf(x) = \begin{bmatrix} x & 0 \end{bmatrix}$. Donc le carré de gauche est commutatif. En outre, pour tout $y \in Y$, on écrit $y = f(x) + g'(z)$, alors $h(y) = (x, z)$. Donc, $\begin{bmatrix} 0 & \mathrm{id}_Z \end{bmatrix} (h(y)) = \begin{bmatrix} 0 & \mathrm{id}_Z \end{bmatrix} (x, z) = z$.

$\square$

Lemme 2.1.8. *Soient A une algèbre de dimension finie et M un A-module à gauche de type fini. Si $f : M \longrightarrow M$ est une section ou une rétraction, alors f est un isomorphisme.*

Démonstration. Si $f : M \longrightarrow M$ est une section ou une rétraction, alors, d'après le **lemme 1.1.18**, f est un monomorphisme ou f est un épimorphisme.

Si f est un monomorphisme, alors $dim(M) = dim(Imf)$. Comme M est de dimension finie, f est un épimorphisme. D'où f est un isomorphisme.

Si f est un épimorphisme, alors $dim(Kerf) = 0$. Donc f est un monomorphisme. D'où f est un isomorphisme.

$\square$

2.2 Modules projectifs et injectifs

Cette section est consacrée à l'étude des modules projectifs et injectifs qui joueront un rôle essentiel dans les chapitres à venir.

Définition 2.2.1. *Soient $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ deux catégories k-linéaires. Un foncteur covariant (contravariant,respectivement) $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ est dit **exact** si l'exactitude de la suite $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ de $\mathcal{C}$ implique l'exactitude de la suite induite de $\mathcal{D}$ $FX \xrightarrow{Ff} FY \xrightarrow{Fg} FZ$ ($FZ \xrightarrow{Fg} FY \xrightarrow{Ff} FX$, respectivement).*

Définition 2.2.2. *Soit A une k-algèbre. Un A-module à gauche P est dit* ***projectif*** *si le foncteur covariant $Hom_A(P,\ )$ est exact.*

Lemme 2.2.3. *Soit A une k-algèbre. Un A-module à gauche P est projectif si et seulement si, pour tout épimorphisme $f \in Hom_A(M,N)$ et tout morphisme $u \in Hom_A(P,N)$, il existe un morphisme $v \in Hom_A(P,M)$ tel que $u = fv$.*

Démonstration. Nécessité. Supposons que $Hom_A(P,-)$ est exact. Alors toute suite exacte courte $0 \longrightarrow L \xrightarrow{g} M \xrightarrow{f} N \longrightarrow 0$ de A-modules induit une suite exacte $0 \longrightarrow Hom_A(P,L) \xrightarrow{g\circ -} Hom_A(P,M) \xrightarrow{f\circ -} Hom_A(P,N) \longrightarrow 0$ $(\star)$. Comme la suite $(\star)$ est exacte, alors $f \circ -$ est un épimorphisme. Donc pour tout $u \in Hom_A(P,N)$, par surjectivité de $f \circ -$, il existe $v \in Hom_A(P,M)$ tel que $f \circ v = u$.

Suffisance. Supposons que pour tout épimorphisme $f \in Hom_A(M,N)$ et tout morphisme $u \in Hom_A(P,N)$, il existe un morphisme $v \in Hom_A(P,M)$ tel que $u = fv$. Supposons que la suite $0 \longrightarrow L \xrightarrow{g} M \xrightarrow{f} N \longrightarrow 0$ est exacte. Soit $h \in Hom_A(P,N)$. Par hypothèse, f est un épimorphisme, donc il existe $h' \in Hom_A(P,M)$ tel que $f \circ h' = h$. D'où $f \circ -$ est un épimorphisme.
Soit $\phi \in Hom_A(P,L)$ tel que $g \circ \phi = 0$. Comme g est un monomorphisme, on $\phi = 0$ et donc $g \circ -$ est un monomorphisme. Alors la suite

$$0 \longrightarrow Hom_A(P,L) \xrightarrow{g\circ -} Hom_A(P,M) \xrightarrow{f\circ -} Hom_A(P,N) \longrightarrow 0$$

est exacte. Donc $Hom_A(P,\ )$ est exact.

□

Proposition 2.2.4. *Soit A une k-algèbre. Alors ${}_AA$ est projectif.*

Démonstration. Soit $f : M \longrightarrow N$ un épimorphisme. Si $g : A \longrightarrow N$ est A-linéaire, alors $x = f(1) \in N$. Comme g épimorphisme, $x = g(y)$ avec $y \in M$. On prétend que l'application

$$\begin{array}{cccc} h & : & A & \longrightarrow & N \\ & & a & \longmapsto & ay \end{array}$$

est A-linéaire. En effet, pour tout $\alpha, \beta \in k$, $a_1, a_2 \in A$, $h(\alpha a_1 + \beta a_2) = (\alpha a_1 + \beta a_2)y = \alpha a_1 y + \beta a_2 y = \alpha h(a_1) + \beta h(a_2)$. De plus, pour tout $a \in A$, $g(a) - fh(a) = g(a) - af(y) = ag(1) - ax = ax - ax = 0$. Donc $g = fh$. Alors, en vertu du **lemme 2.2.3**, ${}_AA$ est projectif.

□

Proposition 2.2.5. *([1], Proposition IV. 2.3) Soit A une k-algèbre avec $M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_n$, où M_i des A-modules à gauche. Alors M est projectif si et seulement si M_i est projectif, pour $i = 1, \ldots, n$.*

Lemme 2.2.6. *Soit A une k-algèbre. Si P est un A-module projectif, alors tout épimorphisme $f : X \longrightarrow P$ est une rétraction.*

Démonstration. Supposons que P est projectif. Soit $f : X \longrightarrow P$ un épimorphisme. Considérant $\mathrm{id}_P : P \longrightarrow P$, d'après le **lemme 2.2.3**, il existe $v : P \longrightarrow X$, tel que $fv = \mathrm{id}_P$. Donc f est une rétraction.

□

Définition 2.2.7. *Soit M, N un A-module. Un sous-module N de M est dit **superflu** si, pour tout sous-module L de M avec $L \neq M$, on a $N + L \neq M$.*

Définition 2.2.8. *Soit M un A-module. Un épimorphisme $f : P \to M$ s'appelle **couverture projective** de M si P est projectif et $Ker(f)$ est superflu dans P.*

Définition 2.2.9. *Soit A une k-algèbre. Un A-module I est dit* ***injectif*** *si le foncteur contravariant $Hom_A(\ ,I)$ est exact.*

Lemme 2.2.10. *Soit A une k-algèbre. Un A-module I est injectif si et seulement si, pour tout monomorphisme $f \in Hom_A(L,M)$ et tout morphisme $u \in Hom_A(L,I)$, il existe un morphisme $v \in Hom_A(M,I)$ tel que $u = vf$.*

Démonstration. Nécessité. Supposons que I est injectif. Soient $f \in Hom_A(L,M)$ un monomorphisme et $u \in Hom_A(L,I)$ un morphisme. Comme f est un monomorphisme, la suite $0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M$ induit une suite exacte $Hom_A(M,I) \xrightarrow{-\circ f} Hom_A(L,I) \longrightarrow 0$. Alors $-\circ f$ est un épimorphisme. Et comme $u \in Hom_A(L,I)$, il existe un morphisme $v \in Hom_A(M,I)$ tel que $v \circ f = u$.

Suffisance. Supposons que pour tout monomorphisme $f \in Hom_A(L,M)$ et tout morphisme $u \in Hom_A(L,I)$, il existe un morphisme $v \in Hom_A(M,I)$ tel que $u = vf$. Supposons que la suite $0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ est exacte. Par hypothèse, pour tout morphisme $u \in Hom_A(L,I)$, il existe $v \in Hom_A(M,I)$ tel que $u = v \circ f$. Donc $-\circ f$ est un épimorphisme. Soit $h \in Hom_A(N,I)$ tel que $h \circ g = 0$. Comme g est un épimorphisme, alors $h = 0$ et donc $-\circ g$ est un monomorphisme. Alors la suite

$0 \longrightarrow Hom_A(N,I) \xrightarrow{-\circ g} Hom_A(M,I) \xrightarrow{-\circ f} Hom_A(L,I) \longrightarrow 0$ est exacte.

Donc $Hom_A(\ ,I)$ est exact.

□

Proposition 2.2.11. *([1], Proposition IV. 3.2) Soit A une k-algèbre avec $M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_n$, où M_i des A-modules à gauche. Alors M est injectif si et seulement si M_i est injectif, pour $i = 1,\ldots,n$.*

Lemme 2.2.12. *Soit A une k-algèbre. Si I est un A-module injectif, alors tout monomorphisme $g : I \longrightarrow X$ est une section.*

Démonstration. Supposons que I est injectif. Soit $g : I \longrightarrow X$ un monomorphisme. Considérant $\mathrm{id}_I : I \longrightarrow I$, d'après le le **lemme 2.2.10**, il existe $v : X \longrightarrow I$, tel que $vg = \mathrm{id}_I$. Donc g est une section.

$\square$

Définition 2.2.13. *Un sous-module N de M est dit* ***essentiel*** *si pour tout sous-module non nul L de M, $N \cap L$ est non nul.*

Définition 2.2.14. *Soit M un A-module. Une* ***enveloppe injective*** *de M est une paire (I, j), où I est un A-module injectif et $j : M \longrightarrow I$ est un monomorphisme tel que $Im(j)$ est essentielle dans I.*

2.3 Idempotents d'algèbres

Dans cette section, nous introduisons la notion d'idempotents qui joueront un rôle essentiel pour la compréhension des algèbres de chemins que nous définissons dans le chapitre 3.

Définition 2.3.1. *Soit A une k-algèbre de dimension finie. Un élément e de A est appelé un* ***idempotent*** *si $e^2 = e$. Deux idempotents e et e' sont dits* ***orthogonaux*** *si $ee' = e'e = 0$. Un idempotent e est dit* ***primitif*** *si $e = e' + e''$, avec e', e'' deux idempotents orthogonaux,* *entraîne que* $e' = 0$ *ou* $e'' = 0$*. On dit que* A *est* ***connexe*** *si 0 et 1 sont les seuls idempotents centraux de* A*.*

Lemme 2.3.2. *Soit* A *une* k*-algèbre. Si* e *est un idempotent de* A*, alors* $A = Ae \oplus A(1-e)$*. En particulier,* Ae *est projectif à gauche.*

Démonstration. Si e est un idempotent de A. On a $(1-e)^2 = 1-e-e+e^2 = 1-e-e+e = 1-e$ et $e(1-e) = e - e^2 = e - e = 0$. Donc $(1-e)$ est un idempotent et il est orthogonal à e. Soit a un élément de ${}_AA$. On a $a = ae + a - ae = ae + a(1-e) \in Ae + A(1-e)$. Donc $A = Ae + A(1-e)$. Supposons que $a \in Ae \cap A(1-e)$. Alors $a = xe = y(1-e)$, avec $x, y \in A$, et donc $xe - y(1-e) = 0$. D'où $0 = 0e = (xe - y(1-e))e = xe$. Donc $0 = xe = a$ et donc $Ae \cap A(1-e) = \{0\}$. Ainsi, ${}_AA = Ae \oplus A(1-e)$. Or d'après la **proposition 2.2.4**, ${}_AA$ est projectif. D'où, d'après le **lemme 2.2.5**, eA est projectif.

□

Proposition 2.3.3. *([1], VIII.1.4) Soient* A *une* k*-algèbre de dimension finie et* $e \in A$ *un idempotent. Alors* Ae *est indécomposable si et seulement si* e *est primitif.*

Définition 2.3.4. *Soit* A *une* k*-algèbre. Un ensemble* $\{e_1, \ldots, e_n\}$ *d'idempotents de* A *s'appelle un* ***ensemble complet d'idempotents primitifs orthogonaux*** *si les* e_i *sont primitifs et deux à deux orthogonaux tels que* $\sum_{i=1}^{n} e_i = 1_A$*.*

Définition 2.3.5. *Soit* A *un* k*-algèbre avec un ensemble complet d'idempotents primitifs orthogonaux* $\{e_1, \ldots, e_n\}$*. On dit que* A *est* ***sobre*** *si* $Ae_i \ncong Ae_j$*, pour tout* $i \neq j$*.*

Lemme 2.3.6. *([3] I.5.17) Soient A une k-algèbre et ${}_AA = Ae_1 \oplus \cdots \oplus Ae_n$ la décomposition de A en somme directe de sous-modules indécomposables. Alors, tout A-module projectif indécomposable est isomorphe à $P_i = Ae_i$, pour un certain $1 \leq i \leq n$.*

Proposition 2.3.7. *Soit A une k-algèbre, dont e est un idempotent dans A.*

(1) *$eAe = \{eae \mid a \in A\}$ est une algèbre dont e est l'identité.*

(2) *L'application*

$$\begin{array}{cccc} \phi & : & End_A(Ae) & \longrightarrow & eAe \\ & & f & \longmapsto & f(e) \end{array}$$

est un anti-isomorphisme d'algèbres.

Démonstration. (1) eAe est un sous-module du k-module A. Pour tous eae, ebe dans eAe, on a $(eae)(ebe) = e(aeb)e$ dans eAe, et $e(eae) = eae = (eae)e$. Ainsi, eAe est une k-algèbre dont e est l'identité.

(2) Soit f dans $End_A(Ae)$. Étant dans Ae, $f(e) = f(e)e$. Ainsi, $f(e) = f(ee) = ef(e) = ef(e)e$. Soient $f_1, f_2 \in End_A(Ae)$. Alors $\phi(f_1 + f_2) = (f_1 + f_2)(e) = f_1(e) + f_2(e) = \phi(f_1) + \phi(f_2)$. Soient $f, g \in End_A(Ae)$. Alors $\phi(fg) = (fg)(e) = f(g(e))$. Comme $g(e)$ est dans Ae, $g(e) = g(e)e$. Donc $f(g(e)) = f(g(e)e) = g(e)f(e)$ car f est A-linéaire à gauche. D'où $\phi(fg) = \phi(g)\phi(f)$.

Soient $f, g \in End_A(Ae)$ tels que $\phi(f) = \phi(g)$. Alors $f(e) = g(e)$. Donc, pour tout $ae \in Ae$, on a $f(ae) = af(e) = ag(e) = g(ae)$. Ce qui implique $f = g$. D'où ϕ est injective.

Pour tout x dans Ae, l'application

$$\begin{array}{rcccc} f_x & : & Ae & \longrightarrow & Ae \\ & & a & \longmapsto & xae \end{array}$$

est linéaire. En effet, pour tout $a_1, a_2 \in A$ et $\alpha, \beta \in Ae$, $f_x(a_1\alpha + a_2\beta) = x(a_1\alpha + a_2\beta)e = xa_1\alpha e + xa_2\beta e = xa_1 e\alpha + xa_2 e\beta = f_x(a_1)\alpha + f_x(a_2)\beta$. On a $\phi(f_x) = f_x(e) = xe = x$. D'où ϕ est surjective. Par conséquent, ϕ est un anti-isomorphisme d'algèbres.

□

En prenant $e = 1_A$, on a le corollaire suivant :

Corollaire 2.3.8. *Soit A une k-algèbre. Alors,*

$$\begin{array}{rcccc} \phi_A & : & Hom_A({}_AA, {}_AA) & \longrightarrow & A \\ & & f & \longmapsto & f(1) \end{array}$$

est un anti-isomorphisme d'algèbres.

2.4 Modules semi-simples et algèbres semi-simples

Cette section est une brève introduction des notions de modules semi-simples et d'algèbres semi-simples. On introduit seulement les notions minimales pour nos besoins.

Définition 2.4.1. *Soit A une k-algèbre. Un A-module M non nul est dit* ***simple*** *si ses seuls sous-modules sont 0 et M.*

Proposition 2.4.2. *Soient A une k-algèbre et M un A-module à gauche non nul. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) *M est simple,*

(2) *toute application $f : M \longrightarrow L$ est nulle ou injective,*

(3) *toute application $g : L \longrightarrow M$ est nulle ou surjective.*

Démonstration. (1) *implique* (2) : Supposons que M est simple. Soit $f : M \longrightarrow L$ une application linéaire. Comme M est simple et $ker(f) \subseteq M$, alors $ker(f) = 0_M$ ou $ker(f) = M$.

Si $ker(f) = 0_M$, alors f est injective.

Si $ker(f) = M$, alors pour tout x dans M, $f(x) = 0_L$. Donc f est nulle.

(2) *implique* (3) : Supposons que toute application linéaire $f : M \longrightarrow L$ est nulle ou injective. Soit $g : L \longrightarrow M$ une application linéaire. Considérons la projection canonique $p : M \longrightarrow M/Im(g)$. Si p est nulle, alors $M/Im(g) = 0$. D'où $M = Im(g)$. Donc g est surjective. Sinon, p est injective. D'où $Im(g) = ker(p) = 0$. Donc g est nulle.

(3) *implique* (1) : Supposons que toute application linéaire $g : L \longrightarrow M$ est nulle ou surjective. Soit N un sous-module de M. Considérons l'inclusion $j : N \longrightarrow M$. Si j est nulle, alors $N = 0$. Sinon, j est surjective par (3). D'où $M = Im(j) = N$. Donc M est simple.

□

Définition 2.4.3. *Soit A une k-algèbre. Un A-module M est dit* ***semi-simple*** *si $M = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$ où chaque M_λ est simple.*

Lemme 2.4.4. *Soient A une k-algèbre et M un A-module de type fini. Si M est semi-simple, alors $M = S_1 \oplus \cdots \oplus S_n$, où chaque S_i est simple.*

Démonstration. Soit M un A-module engendré par $v_1, \ldots, v_s$. Supposons que M est semi-simple. Alors $M = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda$, où S_λ est un A-module simple et Λ est un ensemble d'indices. En particulier, $M = \sum_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda$. Donc $v_i = v_{i1} + \cdots + v_{in_i}$, $i = 1, \ldots, s$, où $v_{ij} \in S_{\lambda_{ij}}$ avec $\lambda_{ij} \in \Lambda$. Ainsi, $v_i \in \sum_{j=1}^{n_i} S_{\lambda_{ij}}$, $i = 1, \ldots, s$. Par consequent, $v_1, \ldots, v_s \in \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{n_i} S_{\lambda_{ij}}$. Supposons que $\mu_1, \ldots, \mu_t$ sont les indices deux à deux distincts de l'ensemble $\{\lambda_{ij} | i = 1, \ldots, s, j = 1, \ldots, n_i\}$. Alors $v_1, \ldots, v_s \in \sum_{i=1}^{t} S_{\mu_i}$. Comme M est engendré par $v_1, \ldots, v_s$, on a $M \subseteq \sum_{i=1}^{t} S_{\mu_i}$. Par conséquent $M = \sum_{i=1}^{t} S_{\mu_i} = \bigoplus_{i=1}^{t} S_{\mu_i}$.

□

Définition 2.4.5. *Soit A une k-algèbre. On dit que A est* ***semi-simple*** *si le A-module ${}_AA$ est semi-simple.*

Corollaire 2.4.6. *Soit A une k-algèbre de dimension finie. Si A est semi-simple, alors ${}_AA = P_1 \oplus \cdots \oplus P_n$, où P_i est projectif et simple.*

Démonstration. Étant engendré par 1_A, le A-module ${}_AA$ est de type fini. Alors, si A est semi-simple, en vertu du **lemme 2.4.4**, ${}_AA = P_1 \oplus \cdots \oplus P_n$, où P_i est simple. Ainsi, d'après la **proposition 2.2.4**, ${}_AA$ est projectif. Donc, d'après **lemme 2.2.5**, P_i est projectif.

□

Le résultat suivant dû de Wedderburn donne une caractérisation des algèbres semi-simples :

Théorème 2.4.7. *([1] VI 7.1) Soit A une k-algèbre. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) *A est semi-simple ;*

(2) *Tout A-module à gauche est semi-simple ;*

(3) *Tout A-module à gauche est projectif ;*

(4) *Tout A-module à gauche est injectif ;*

(5) *$A \cong \prod_{i=1}^{t} M_{n_i}(k_i)$, où les k_i sont des sur-corps sur k.*

2.5 Modules indécomposables

Définition 2.5.1. *Soit A une k-algèbre. Un A-module M est dit* ***indécomposable*** *si $M \neq 0$ et si $M = M_1 \bigoplus M_2$ entraine $M_1 = 0$ ou $M_2 = 0$.*

Théorème 2.5.2. *([1], VII. 6.13, Théorème de Krull-Schmidt) Soit M un A-module non nul de type fini. Alors, $M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_n$, où M_i est indécomposable. Par ailleurs, si $M = N_1 \oplus \cdots \oplus N_m$, avec N_j indécomposable, alors $m = n$ et il existe une permutation σ sur $\{1, \ldots, n\}$ telle que $M_i \cong N_{\sigma(i)}$, pour tout $1 \leq i \leq n$.*

Définition 2.5.3. *Une k-algèbre A est dite* ***locale*** *si elle n'a qu'un seul idéal à gauche maximal.*

Proposition 2.5.4. *([1], VII. 6.5) Soit A une k-algèbre. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) *A est locale,*

(2) *Pour chaque $x \in A$, x ou $1 - x$ est inversible,*

(3) *$A/radA$ est un sur-corps de k.*

Proposition 2.5.5. *([1], VII. 6.11) Soient A une k-algèbre et M un A-module de dimension finie. Alors, M est indécomposable si et seulement si $End(M)$ est locale.*

2.6 Radical de modules et d'algèbres

Définition 2.6.1. *Soit A une k-algèbre. Un sous-module N de M est dit* ***maximal*** *si $N \neq M$ et si L est un sous-module de M tel que $N \subseteq L \subseteq M$, alors $L = N$ ou $L = M$.*

Remarque 2.6.2. *On note qu'un module M est simple si et seulement si 0 est un sous-module maximal. En effet, si M est simple, alors ses seuls sous-modules sont 0 et M. Donc 0 n'est contenu dans aucun sous-module autre que M. Si 0 est maximal, alors il n'y a aucun autre sous-module L de M qui contient 0. Donc les seuls sous-modules de M sont 0 et M.*

Définition 2.6.3. *Soient A une k-algèbre et M un A-module. On appelle* ***radical*** *de M, noté $rad(M)$, l'intersection de tous les sous-modules maximaux de M. Si M n'a aucun sous-module maximal, par convention, $rad(M) = M$.*

Remarque 2.6.4. *Soit M un A-module. Si $M = 0$, alors, par convention, $radM = 0$.*

Proposition 2.6.5. *([1], VII. 1.4) Soient A une k-algèbre et M un A-module. Si $M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_s$, alors $radM = radM_1 \oplus \cdots \oplus radM_s$.*

Lemme 2.6.6. *Soient A une k-algèbre et M un A-module de type fini. Si M est semi-simple, alors $radM = 0$.*

Démonstration. Si M est semi-simple, alors, d'après le **lemme 2.4.4**, $M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_t$, où les M_i sont simples. Ainsi, d'après la **proposition 2.6.5**, $radM = radM_1 \oplus \cdots \oplus radM_t$. Comme 0 est le seul sous-module maximal des M_i, $radM_i = 0$. D'où, $radM = 0$.

□

Proposition 2.6.7. *Soient A une k-algèbre et M, N deux A-modules et $f : M \longrightarrow N$ un morphisme. Alors, $f(rad(M)) \subseteq rad(N)$.*

Démonstration. Soit $g_i : N \longrightarrow S_i$ une application non nulle où $(S_i)_{i \in I}$ est la famille de A-modules simples. Alors l'application composée $g_i \circ f : M \longrightarrow S_i$ est telle que $rad(M) = \bigcap_{i \in I} Ker(g_i \circ f)$. Donc, $(g_i \circ f)(rad(M)) = g_i(f(radM)) = 0$. Alors $f(rad(M)) \subseteq Ker(g_i)$, pour tout $i \in I$. Or $rad(N) = \bigcap_{i \in I} Ker(g_i)$, donc $f(rad(N)) \subseteq rad(N)$.

□

Lemme 2.6.8. *([1], VIII.2.1) Soient P et M deux A-modules de dimension finie, avec P projectif. Alors un épimorphisme $f : P \to M$ est une couverture projective si et seulement si $Kerf \subseteq radP$.*

Définition 2.6.9. *Soit A une k-algèbre. On appelle **radical de Jacobson** de A, noté $radA$, le radical du A-module ${}_AA$. On remarque que $radA$ est l'intersection de tous les idéaux à gauche maximaux de A.*

Proposition 2.6.10. *([1], VII. 3.2) Soit A une k-algèbre. Les conditions suivantes sont équivalentes, pour tout $a \in A$:*

(1) $a \in rad(A)$,

(2) $1 - ax$ *est inversible pour tout* $x \in A$,

(3) $1 - xa$ *est inversible pour tout* $x \in A$.

Lemme 2.6.11. *Soit* A *une* k*-algèbre. Si* $a \in A$ *est nilpotent, alors* $1 - a$ *est inversible.*

Démonstration. Si $a^n = 0$, alors $(1 - a)(1 + a + \cdots + a^{n-1}) = 1 - a^n = 1$. Donc $1 - a$ est inversible.

□

Proposition 2.6.12. *([8] corollaire 1.15) Le radical d'une* k*-algèbre de dimension finie* A *est l'unique idéal nilpotent* I *tel que* A/I *soit semi-simple.*

Proposition 2.6.13. *([1], VII.4.4.) Soit* A *une* k*-algèbre de dimension finie, alors* $\bar{A} = A/rad(A)$ *est une* k*-algèbre semi-simple.*

Lemme 2.6.14. *([3], I.6.2) Soit* k *un corps algébriquement clos. Une* k*-algèbre* A *de dimension finie est sobre si* $A/radA = k \times \cdots \times k$.

Lemme 2.6.15. *([1], VII.4.3.) Soient* A *une algèbre et* M *un* A*-module. Alors,* M *est un* A*-module simple si et seulement si* M *est un* $\bar{A}$*-module simple.*

Lemme 2.6.16. *Soient* A *une* k*-algèbre et* M *un* A*-module à gauche. Si* I *est un idéal de* A *tel que* $IM = 0$*, alors* M *est un* (A/I)*-module si on définit* $(a + I)x = ax$*, pour tout* $a \in A$ *et* $x \in M$.

Démonstration. Soient $a, b \in A$ tels que $a + I = b + I$. Alors, $a - b \in I$. Ainsi, pour tout $x \in M$, $(a-b)x = 0$. Ce qui implique que $ax = bx$. Donc la multiplication est correctement définie et que les axiomes se vérifient.

□

Proposition 2.6.17. *Soient A une k-algèbre de dimension finie et M un A-module à gauche. Alors $rad(M) = (radA)M$.*

Démonstration. Soient $x \in M$ et l'application A-linéaire

$$\begin{array}{cccc} f_x & : & A & \longrightarrow & M \\ & & a & \longmapsto & ax \end{array}$$

Alors, $(rad(A))x = f_x(rad(A)) \subseteq rad(M)$, d'après la **proposition 2.6.7**. Donc $rad(A)M \subseteq rad(M)$. En vertu du **lemme 2.6.16**, $\bar{M} = M/rad(A)M$ est un $\bar{A}$-module où $\bar{A} = A/rad(A)$ est une algèbre semi-simple d'après la **proposition 2.6.13**. Alors, d'après le **théorème 2.4.7**, $\bar{M}$ est un $\bar{A}$-module semi-simple. d'après le **lemme 2.6.15**, pour tout $\bar{x} \in \bar{M}$ tel que $\bar{x} \neq \bar{0}$, il existe $f : \bar{M} \longrightarrow S$ avec S simple tel que $f(\bar{x}) \neq 0$. Soit $p : M \longrightarrow \bar{M}$ la projection canonique, on a $fp(x) = f(\bar{x}) \neq 0$. Donc $x \notin rad(M)$. Ainsi, $rad(M) \subseteq (radA)M$.

□

Proposition 2.6.18. *Soient A une k-algèbre et M un module non nul dans $modA$. Alors $radM = 0$ si et seulement si $M = S_1 \oplus \cdots \oplus S_n$, où S_i est simple.*

Démonstration. Nécessité. Supposons que $radM = 0$. Alors, d'après la **proposition 2.6.17**, $(radA)M = 0$. Donc, d'après le **lemme 2.6.16**, M est un $(A/radA)$-module. Ainsi, d'après la **proposition 2.6.13**, M est semi-simple.

Suffisance. Supposons que M est semi-simple. d'après le **lemme 2.4.4**, $M = S_1 \oplus \cdots \oplus S_n$, où S_i est simple. Alors, d'après la **proposition 2.6.5**, $radM = radS_1 \oplus \cdots \oplus radS_n$. Comme 0 est le seul sous-module maximal des S_i, $radS_i = 0$. D'où, $radM = 0$. □

2.7 Radical de la catégorie des modules

Avant de pouvoir classifier les algèbres A dont $rad^n(modA) = 0$, $n = 1, 2$, il est primordial de connaitre les propriétés de $rad(modA)$. Ainsi, dans ce but, nous énonçons dans cette section quelques résultats concernant le radical de la catégorie des modules. Pour $M, N \in modA$, on désignera par $rad(M, N)$ l'ensemble des morphismes de $rad(modA)$ de M à N.

Le résultat suivant nous donne un lien entre les A-modules indécomposables et $rad(modA)$:

Proposition 2.7.1. *Soient M, N des A-modules et $f : M \longrightarrow N$ un morphisme de A-modules.*

(1) *Si M est indécomposable, alors $f \in rad(M, N)$ si et seulement si f n'est pas une section.*
(2) *Si N est indécomposable, alors $f \in rad(M, N)$ si et seulement si f n'est pas une rétraction.*
(3) *Si M et N sont indécomposables, alors $f \in rad(M, N)$ si et seulement si f n'est pas un isomorphisme.*

Démonstration. (1) *Nécessité.* Soit $f \in rad(M, N)$. Comme M est non nul, d'après le **lemme 1.3.3** (1), f n'est pas une section.

Suffisance. Si $f \notin rad(M, N)$, alors, il existe $g : N \longrightarrow M$ tel que $\mathrm{id}_M - gf$ n'est pas inversible. Or $gf \in End_A(M)$ et comme M est indécomposable, $End_A(M)$ est local. Alors gf ou $1_M - gf$ est inversible. Par hypothèse, $\mathrm{id}_M - gf$ n'est pas inversible et donc, gf est inversible. Alors, il existe h dans $End_A(M)$ tel que $h(gf) = (hg)f = \mathrm{id}_M$. Donc f est une section.

(2) *Nécessité.* Soit $f \in rad(M, N)$. Comme N est non nul, d'après le **lemme 1.3.3** (2), f n'est pas une rétraction.

Suffisance. Si $f \notin rad(M, N)$, alors il existe $g : N \longrightarrow M$ tel que $\mathrm{id}_N - fg$ n'est pas inversible. Or $fg \in End_A(N)$ et comme N est indécomposable, $End_A(N)$ est local. Alors au moins fg ou $\mathrm{id}_N - fg$ est inversible. Par hypothèse, $\mathrm{id}_N - fg$ n'est pas inversible et donc, fg est inversible. Alors, il existe h dans $End_A(N)$ tel que $(fg)h = f(gh) = \mathrm{id}_N$. Donc f est une rétraction.

(3) Si M et N sont indécomposables, (1) et (2) impliquent que $f \in rad(M, N)$ si et seulement si, f n'est pas un isomorphisme.

□

Corollaire 2.7.2. *Soient A une k-algèbre et S un A-module simple.*

(1) *Si S est projectif, alors $rad(M, S) = 0$, pour tout A-module M.*

(2) *Si S est injectif, alors $rad(S, M) = 0$, pour tout A-module M.*

Démonstration. (1) Soit $f \in rad(M, S)$. Supposons que f est non nul. Comme S est simple, d'après la **proposition 2.4.2** (3), f est un épimorphisme. Puisque S est projectif, d'après le **lemme 2.2.6**, f est une rétraction. Ce qui contredit la **proposition 2.7.1**

(2). Donc $rad(M,S)=0$.

(2) Soit $g \in rad(S,M)$. Supposons que g est non nul. Comme S est simple, d'après la **proposition 2.4.2** (2), g est un monomorphisme. Puisque S est injectif, d'après le **lemme 2.2.12**, g est une section. Ce qui contredit la **proposition 2.7.1** (1). Donc $rad(S,M)=0$.

□

Lemme 2.7.3. *Soient A une algèbre de dimension finie et M un A-module indécomposable.*

> (1) *Si M est non projectif, alors la couverture projective $p : P \longrightarrow M$ appartient à $rad(P,M)$.*
>
> (2) *Si M est non injectif, alors l'enveloppe injective $j : M \longrightarrow I$ appartient à $rad(M,I)$.*

Démonstration. (1) Supposons que M est non projectif. Soit $p : P \longrightarrow M$ la couverture projective de M. Supposons au contraire que p est une rétraction. Alors, il existe $f : M \longrightarrow P$ tel que $pf = \mathrm{id}_M$. Donc, d'après le **lemme 2.1.4**, $P = Im(f) \oplus Ker(p)$. Alors, d'après la **proposition 2.2.5**, $Im(f)$ est projective. Or, d'après le **lemme 1.1.18** (1), f est un monomorphisme. Alors, $M \cong Im(f)$. Ainsi, M est projectif. Ce qui est absurde. Donc, p n'est pas une rétraction. Puisque M est indécomposable, d'après la **proposition 2.7.1** (2), p appartient à $rad(P,M)$.

(2) Supposons que M est non injectif. Soit $j : M \longrightarrow I$ l'enveloppe injective de M. Supposons au contraire que j est une section. Alors, il existe $g : I \longrightarrow M$ tel que $gj = \mathrm{id}_M$.

Donc, d'après le **lemme 2.1.4**, $I = Im(j) \oplus Ker(g)$. Alors, d'après la **proposition 2.2.11**, $Im(j)$ est injective. Or, d'après le **lemme 1.1.18** (1), j est un monomorphisme. Alors, $M \cong Im(j)$. Ainsi, M est injectif. Ce qui est absurde. Donc, j n'est pas une section. Puisque M est indécomposable, d'après la **proposition 2.7.1** (1), j appartient à $rad(M, I)$. □

2.8 Catégorie de modules dont le radical est nilpotent

Définition 2.8.1. *Soit A une k-algèbre. Un élément $x \in A$ est dit* ***nilpotent*** *s'il existe un entier $m \in \mathbb{N}$ tel que $x^m = 0$. Un idéal I de A est dit* ***nil*** *si tout élément de I est nilpotent. De plus, l'idéal I est lui-même dit* ***nilpotent*** *s'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $I^n = 0$.*

Proposition 2.8.2. *Soient A une k-algèbre et $f \in Hom_A(A, A)$. Alors f est dans $rad(A, A)$ si et seulement si, $f(1) \in rad(A)$.*

Démonstration. D'après le **corollaire 2.3.8**, un morphisme $f : A \longrightarrow A$ de k-algèbre est inversible si et seulement si, $f(1)$ est inversible.

Nécessité. Supposons que f est dans $rad({}_AA, {}_AA)$. $f(1)$ est dans A. Soit $x \in A$. D'après le **corollaire 2.3.8**, il existe g dans $Hom_A(A, A)$ tel que $\phi_A(g) = g(1) = x$. Comme f est dans $rad({}_AA, {}_AA)$, $\mathrm{id}_A - fg$ est inversible. De plus $(\mathrm{id}_A - fg)(1)$ est inversible. Donc $\mathrm{id}_A(1) - (fg)(1) = \mathrm{id}_A(1) - g(1)f(1) = \mathrm{id}_A - xf(1)$ est inversible. Alors $f(1)$ est dans $rad(A)$.

Suffisance. Supposons que $f(1)$ est $rad(A)$. Pour tout g dans $Hom_A(A, A)$, $g(1) \in A$. Donc $\mathrm{id}_A - f(1)g(1) = \mathrm{id}_A - (gf)(1) = \mathrm{id}_A(1) - (gf)(1) = (\mathrm{id}_A - gf)(1)$ est inversible. Alors, $\mathrm{id}_A - gf$ est inversible. D'où, $f \in rad(_AA,_A A)$.

□

Le résultat suivant est d'une importance capitale, en particulier, pour $n = 1, 2$:

Proposition 2.8.3. *Soit A une algèbre de dimension finie. Pour tout entier $n \geq 1$, $rad^n(modA) = 0$ si, et seulement si $rad^n(X, Y) = 0$, pour tous modules indécomposables X, Y de $modA$.*

Démonstration. Nécessité. Si $rad^n(modA) = 0$. Alors, par définition du radical de $modA$, $rad^n(X, Y) = 0$ pour tout X, Y dans $modA$.

Suffisance. Supposons que $rad^n(X, Y) = 0$ pour tous modules indécomposables X, Y de $modA$. Soit f dans $rad^n(M, N)$, avec M, N dans $modA$. Si $M = 0$ ou $N = 0$, alors $rad^n(M, N) = 0$. Supposons que M et N sont tous non nuls. d'après le **théorème 2.5.2**, $M = \bigoplus_{i=1}^{l} M_i$ et $N = \bigoplus_{j=1}^{m} N_j$, où M_i, N_j sont indécomposables. Soient $p_i : M \longrightarrow M_i$, $q_i : M_i \longrightarrow M$, $p'_j : N \longrightarrow N_j$ et $q'_j : N_j \longrightarrow N$ les projections et injections associées. Ecrivons $f = [f_{ij}]$, où $f_{ij} = p'_j f q_i : M_j \longrightarrow N_i$. Alors, d'après la **théorème 1.2.3** (2), f_{ij} est dans $rad^n(M_i, N_j) = 0$, pour tout i, j. Donc, d'après le **théorème 1.2.3** (1), $rad^n(modA) = 0$.

□

Pour $n = 1$, le résultat suivant montre que si $rad(modA) = 0$, alors l'algèbre A est semi-simple. Il nous simplifiera la preuve du premier résultat de ce mémoire :

Proposition 2.8.4. *Soit A une k-algèbre de dimension finie. Si $rad^n(modA) = 0$ pour un entier $n \geq 1$, alors $rad^n(A) = 0$.*

Démonstration. Supposons $rad^n(modA) = 0$. Soit x dans $rad^n(A)$. Alors $x = \sum_{j=1}^{m} x_{i1}x_{i2}\dots x_{in}$, où $x_{ij} \in rad(A)$. Comme le morphisme ϕ du **corollaire 2.3.8** est surjectif, $x_{ij} = \phi(f_{ij}) = f_{ij}(1)$ avec $f_{ij} \in Hom_A(A, A)$. d'après la **proposition 2.8.2**, $f_{ij} \in rad(A, A)$. Ainsi $f_{i1}f_{i2}\dots f_{in} \in rad^n(A, A) = 0$. D'où, $x_{i1}x_{i2}\dots x_{in} = 0$, et donc, $x = 0$.

□

Maintenant que le concept de radical d'une catégorie de modules est introduit ainsi que la notion de nilpotence, le résultat suivant est l'un des résultats essentiels de ce mémoire :

Proposition 2.8.5. *Soit A une k-algèbre de dimension finie. Alors, $rad(modA) = 0$ si et seulement si, A est semi-simple.*

Démonstration. Nécessité. Si $rad(modA) = 0$, d'après la **proposition 2.8.4**, $rad(A) = 0$. Alors A est semi-simple.

Suffisance. Supposons que A est semi-simple. Soient M, N des A-modules non nuls. Alors, d'après le **théorème 2.4.7**, $M = S_1 \oplus \dots \oplus S_t$, où les S_i sont simples et injectifs. D'après le **corollaire 2.7.2**, $rad(M, N) = \bigoplus_{i=1}^{t} rad(S_i, N) = 0$. □

2.9 Dualité standard

On introduit maintenant le principe de dualité, qui sera un outil puissant dans les démonstrations.

Définition 2.9.1. *Soient $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ deux catégories k-linéaires. Une paire (F, G) de foncteurs contravariants $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ et $G : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ est appelée une* ***dualité*** *entre $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ s'il existe des isomorphismes fonctoriels $GF \cong \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$ et $FG \cong \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$.*

Soit A une k-algèbre de dimension finie. On définit ***l'algèbre opposée*** A^{op} de A munie de la même structure de k-module que A et dont la multiplication est définie par $a \cdot b = ba$, pour tout $a, b \in A$. Ainsi, si M est un A^{op}-module à gauche, on définit sur M une structure de A-module à droite en posant $x \cdot a = ax$, pour tout $x \in M$ et $a \in A$.

Le foncteur $D : modA^{op} \longrightarrow modA$ défini en affectant à chaque A^{op}-module à gauche (c'est-à-dire, A-module à droite) M le k-espace dual $DM = Hom_k(M, k)$ doté de la structure de A-module à gauche donné par la formule $(a\rho)(m) = \rho(ma)$, pour $\rho \in Hom_k(M, k)$, $a \in A$ et $m \in M$, et à tout morphisme $f : M \longrightarrow N$ le morphisme dual de A-modules à droite

$$Df = Hom_k(f,\ k) \quad : \quad \begin{array}{ccc} DN & \longrightarrow & DM \\ \rho & \longmapsto & \rho f \end{array}$$

est appelé ***dualité standard***.

Sachant que le foncteur dualité standard induit une dualité entre A-modules à gauche et A-modules à droite, les résultats suivants permettent de déduire les propriétés préservées par cette dualité :

Proposition 2.9.2. *([1] VIII. 4.5 et VIII. 4.6) Soit A une algèbre de dimension finie. Alors il existe une dualité $D = Hom_k(-,k)$; $modA^{op} \longrightarrow modA : M \longrightarrow DM$; $f \longrightarrow Df$ telle que pour tout module M dans $modA^{op}$, on a :*

(1) *M est simple si et seulement si DM est simple.*

(2) *M est indécomposable si et seulement si DM est indécomposable.*

(3) *M est projectif si et seulement si DM est injectif.*

(4) *M est injectif si et seulement si DM est projectif.*

Proposition 2.9.3. *Soit $f : M \longrightarrow N$ un morphisme dans $modA$. Alors*

(1) *f est un isomorphisme si et seulement si Df est un isomorphisme.*

(2) *f est dans $rad(modA)$ si et seulement si Df est dans $rad(modA^{op})$.*

Démonstration. (1) *Nécessité.* Supposons que $f : M \longrightarrow N$ est un isomorphisme. Alors il existe $f' : N \longrightarrow M$ tel que $ff' = \mathrm{id}_N$ et $f'f = \mathrm{id}_M$. On a $D(ff') = \mathrm{id}_{DN}$ et $D(f'f) = \mathrm{id}_{DM}$. Comme D est contravariant, $D(ff') = D(f')D(f) = \mathrm{id}_{DN}$ et $D(f'f) = D(f)D(f') = \mathrm{id}_{DM}$. Donc Df est un isomorphisme.

Suffisance. Supposons que Df est un isomorphisme. Soit $h : DM \longrightarrow DN$ l'inverse de Df. Comme la dualité D est pleine, il existe $g \in Hom(DN, DM)$ tel que $h = Dg$. Donc $D(g)D(f) = D(fg) = \mathrm{id}_{DN} = D(\mathrm{id}_N)$ et $D(f)D(g) = D(gf) = \mathrm{id}_{DM} = D(\mathrm{id}_M)$. Comme le foncteur D est fidèle, on a $fg = \mathrm{id}_N$ et $gf = \mathrm{id}_M$. Donc f est un isomorphisme.

(2) *Nécessité.* Supposons que $f : M \longrightarrow N$ est dans $rad(modA)$. Pour un morphisme $h : DM \longrightarrow DN$, comme la dualité D est pleine, il existe $g : N \longrightarrow M$ tel que $Dg = h$. Or $\mathrm{id}_{DN} - hDf = \mathrm{id}_{DN} - DgDf = D(\mathrm{id}_N - fg)$. Comme f est dans $rad(M,N)$, on a $\mathrm{id}_N - fg$ est inversible. D'après (1), $\mathrm{id}_{DN} - hDf$ est inversible. Donc Df est dans $rad_{A^{op}}(DN, DM)$.

Suffisance. Supposons que $Df : DN \longrightarrow DM$ est dans $rad(modA^{op})$. Pour tout morphisme $g : N \longrightarrow M$, $D(\mathrm{id}_M - gf) = \mathrm{id}_{DM} - DfDg$. Comme Df est dans $rad(modA^{op})$, $\mathrm{id}_{DM} - DfDg$ est inversible. D'après (1), $\mathrm{id}_M - gf$ est inversible. Donc f est dans $rad_A(M, N)$.

□

Proposition 2.9.4. *Soit A une k-algèbre de dimension finie. Pour tout entier $n \geq 1$, $rad^n(modA) = 0$ si et seulement si $rad^n(modA^{op}) = 0$.*

Démonstration. Nécessité. Supposons que $rad^n(modA) = 0$. Soit $f \in rad^n(modA^{op})$. Alors, $f = \sum_{j=1}^{m} f_{i1} \dots f_{in}$, où $f_{ij} \in rad(modA^{op})$. Or, d'après la **proposition 2.9.3** (2), $D(f) = \sum_{j=1}^{m} D(f_{i1} \dots f_{in}) = \sum_{j=1}^{m} D(f_{in})D(f_{in-1}) \dots D(f_{i1})$ est dans $rad^n(modA)$. Comme $rad^n(modA) = 0$, $D(f) = 0$. Puisque D est fidèle, $f = 0$. D'où $rad^n(modA^{op}) = 0$.

Suffisance. Supposons que $rad^n(modA^{op}) = 0$. On sait que $rad^n(mod(A^{op})^{op}) = 0$. Donc, puisque $(A^{op})^{op} = A$, on a $rad^n(modA) = 0$.

□

Proposition 2.9.5. *Soit A une k-algèbre de dimension finie. Alors A est semi-simple si est seulement si A^{op} est semi-simple.*

Démonstration. D'après la **proposition 2.8.5**, A est semi-simple si et seulement si $rad(modA) = 0$ si et seulement si $rad(modA^{op}) = 0$ si et seulement si A^{op} est semi-simple.

□

CHAPITRE 3

Carquois, Algèbres et Représentations

On introduit dans ce chapitre les concepts de base en théorie des représentations des algèbres dont la connaissance est essentielle pour la compréhension de ce mémoire. Nous commençons par la notion de carquois et les algèbres de chemins ainsi que les liens qui existent entre la catégorie des modules $modA$ d'une algèbre et la catégorie des représentations $rep(Q)$. Les définitions et résultats sont issus de [3, 2, 11, 8, 5, 6].

3.1 Carquois et algèbres de chemins

Cette section est consacrée à la structure graphique des algèbres qu'est celle des carquois et à l'introduction de la terminologie associée.

Définition 3.1.1. *Un* ***carquois*** *est un quadruplet $Q = (Q_0, Q_1, s, b)$ consistant en deux ensembles Q_0 et Q_1 dont les éléments sont les sommets et les flèches, respectivement, et deux applications $s, b : Q_1 \longrightarrow Q_0$ qui associent à chaque flèche α sa source $s(\alpha)$ et son but $b(\alpha)$.*

Remarque 3.1.2. *Un carquois* $Q = (Q_0, Q_1, s, b)$ *est souvent noté par* Q *et son graphe sous-jacent, obtenu en omettant l'orientation des flèches, est noté par* $\bar{Q}$. *Un carquois* Q *est dit* ***fini*** *si* Q_0 *et* Q_1 *sont des ensembles finis,* ***connexe*** *si* $\bar{Q}$ *est connexe. De plus, on dit que* $a \in Q_0$ *est une* ***source*** *de* Q *si* a *n'est le* ***but*** *d'aucune flèche de* Q. *En revanche,* $b \in Q_0$ *est un* ***puits*** *de* Q *si* b *n'est la source d'aucune flèche de* Q. *Enfin, une flèche* $\alpha \in Q_1$ *de source* a *et de but* b *est souvent représentée par* $\alpha : a \longrightarrow b$, *et est appelée* ***boucle*** *si* $a = b$.

Définition 3.1.3. *Soient* $Q = (Q_0, Q_1, s, b)$ *un carquois et* $a, b \in Q_0$. *Un* ***chemin*** *de longueur* $l \geq 1$ *de* a *vers* b *est une suite de flèches* $w = \alpha_l \alpha_{l-1} \dots \alpha_1$ *telles que* $s(\alpha_1) = a$, $b(\alpha_i) = s(\alpha_{i+1})$ *pour tout* i *tel que* $1 \leq i \leq l-1$ *et* $b(\alpha_l) = b$. *Un tel chemin est souvent noté* $(b|\alpha_l \alpha_{l-1} \dots \alpha_1|a)$.

À chaque sommet $a \in Q_0$ *d'un carquois* Q, *on associe un chemin de longueur 0 appelé chemin* ***stationnaire*** *en* a *et noté* ε_a. *Un chemin non stationnaire* $(a|\alpha_l \alpha_{l-1} \dots \alpha_1|b)$, *avec* $l > 0$, *dans* Q *est appelé un* ***cycle orienté*** *de* Q *si* $a = b$, *et* Q *est dit* ***acyclique*** *s'il ne contient aucun cycle orienté.*

Exemple 3.1.4. *Le graphe suivant est un exemple de carquois*

$$\begin{tikzcd}
\bullet^1 \arrow[loop left, "\alpha"] \arrow[rr, "\beta"] & & \bullet^3 \arrow[dl, "\gamma"] \arrow[r, "\lambda"] & \bullet^4 \arrow[r, shift left, "\eta"] \arrow[r, shift right, "\mu"'] & \bullet^5 \\
& \bullet^2 \arrow[ul, "\delta"] & & &
\end{tikzcd}$$

L'ensemble Q_0 *des sommets de ce carquois est* $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ *et l'ensemble* Q_1 *de ses flèches est* $\{\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \delta, \mu, \eta\}$. $\lambda\beta\alpha^2\delta\gamma\beta$ *est un chemin du carquois,* $\{5\}$ *est un puits.*

Les carquois sont des outils essentiels à la théorie des représentations des algèbres. Ils permettent de visualiser graphiquement plusieurs algèbres et facilitent la compréhension de la catégorie de modules de celles-ci.

Définition 3.1.5. *Soit $Q = (Q_0, Q_1)$ un carquois. Le* ***carquois opposé*** *de Q est le carquois Q^{op} tel que $Q_0^{op} = Q_0$ et $Q_1^{op} = \{\alpha^{op} : y \to x \mid (\alpha : x \to y) \in Q_1\}$. Un chemin non trivial $p = \alpha_n \dots \alpha_1$ dans $Q(x,y)$, où $\alpha_i \in Q_1$ correspond au chemin $p^{op} = \alpha_1^{op} \dots \alpha_n^{op}$ dans $Q^{op}(y,x)$. Cependant, le chemin trivial de Q à un sommet x sera identifié avec celui de Q^{op} à x.*

Définition 3.1.6. *Soit Q un carquois.* ***L'algèbre de chemins*** *kQ de Q est la k-algèbre dont le k-espace vectoriel sous-jacent admet l'ensemble des chemins de Q comme base, et telle que le produit de deux éléments de la base est défini par $(d|\beta_m \dots \beta_1|c)(b|\alpha_l \dots \alpha_1|a) = \delta_{bc}(d|\beta_m \dots \beta_1 \alpha_l \dots \alpha_1|a)$ où δ_{bc} est le symbole de Kronecker.*

Exemple 3.1.7. *On considère le carquois Q suivant :*

$$\begin{tikzcd}
 & \bullet 2 \arrow[dl, "\alpha"'] \\
1\bullet & \bullet 3 \arrow[l, "\beta"'] \\
 & \bullet 4 \arrow[ul, "\gamma"]
\end{tikzcd}$$

Alors, une base de kQ est $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \alpha, \beta, \gamma\}$. On montre que l'on a un isomorphisme d'algèbres

$$kQ \cong \begin{bmatrix} k & 0 & 0 & 0 \\ k & k & 0 & 0 \\ k & 0 & k & 0 \\ k & 0 & 0 & k \end{bmatrix}$$

Remarque 3.1.8. *Pour un carquois Q donné, on note R l'idéal bilatère de kQ engendré par les flèches de Q. En tant qu'espace vectoriel, R se décompose comme suit :*
$R = kQ_1 \oplus kQ_2 \oplus \cdots \oplus kQ_l \oplus \ldots$ où kQ_l est le sous-espace de kQ engendré par l'ensemble Q_l de tous les chemins de longueur l.

3.2 Algèbres définies par les carquois liés

Étant donné un carquois Q, on peut lui associer une algèbre de chemins. Dans cette section, nous construisons une classe d'algèbres qui généralise la classe d'algèbres associée aux carquois.

Définition 3.2.1. *Soit Q un carquois. Un idéal bilatère I de kQ est dit* ***admissible*** *s'il existe $m \geq 2$ tel que $R_Q^m \subseteq I \subseteq R_Q^2$.*

Remarque 3.2.2. *L'idéal bilatère R_Q^2 est toujours admissible.*

Exemple 3.2.3. *Soit Q le carquois*

$$\begin{tikzcd} 1\bullet \arrow[loop left, "\alpha"] \arrow[r, "\beta"] & \bullet 2 \end{tikzcd}$$

L'idéal $I = \langle \beta\alpha^2, \alpha^3 \rangle$ est admissible. En effet, tout chemin de longueur supérieure ou égale à 3 contient comme sous-chemins $\beta\alpha^2$ ou α^3. Donc $R_Q^3 \subseteq I$. D'autre part, il est clair que $I \subseteq R_Q^2$ puisque les générateurs de I sont de longueur 3. Par conséquent, $R_Q^3 \subseteq I \subseteq R_Q^2$.

Définition 3.2.4. *Soit Q un carquois fini et I un idéal admissible de kQ. La paire (Q,I) est appelée* ***carquois lié*** *et le quotient $kQ/I = \{\rho + I \mid \rho \in kQ\}$ est* ***l'algèbre du carquois lié*** *(Q,I).*

Remarque 3.2.5. *Soit $Q = (Q_0, Q_1)$ un carquois. Soit $A = kQ/I$.* ***L'algèbre opposée*** *de A est $A^{op} = kQ^{op}/I^{op}$, où $I^{op} = \{\rho^{op} \mid \rho \in I\}$. En écrivant $\overline{\gamma^{op}} = \gamma^{op} + I$, pour $\gamma \in kQ$, on obtient un anti-isomorphisme*

$$\begin{array}{cccc} f & : & A & \longrightarrow & A^{op} \\ & & \overline{\gamma} & \longmapsto & \overline{\gamma^{op}} \end{array}$$

Exemple 3.2.6. *Soient l'algèbre de carquois $A = kQ/I = k\langle e_1, e_2, e_3, \alpha + I, \beta + I, \gamma + I, \alpha^2 + I, \beta\gamma + I, \beta\alpha + I, \beta\alpha^2 + I\rangle$ telle que Q est le carquois :*

$$\begin{tikzcd} 1\bullet \arrow[loop left, "\alpha"] \arrow[r, "\beta"] & 2\bullet \arrow[r, "\gamma"] & \bullet 3 \end{tikzcd}$$

et $I = \langle \alpha^3, \gamma\beta\rangle$. Alors $A^{op} = kQ^{op}/I^{op} = k\langle e_1, e_2, e_3, \alpha^{op} + I^{op}, \beta^{op} + I^{op}, \gamma^{op} + I^{op}, (\alpha^{op})^2 + I^{op}, \beta^{op}\gamma^{op} + I^{op}, \beta^{op}\alpha^{op} + I^{op}, \beta^{op}(\alpha^{op})^2 + I^{op}\rangle$, où Q^{op} est le carquois :

$$\begin{tikzcd} \bullet 1 \arrow[loop left, "\alpha^{op}"] & \bullet 2 \arrow[l, "\beta^{op}"'] & \bullet 3 \arrow[l, "\gamma^{op}"'] \end{tikzcd}$$

et $I^{op} = \langle (\alpha^{op})^3, \beta^{op}\gamma^{op}\rangle$.

Proposition 3.2.7. *Soit Q un carquois ayant n sommets. Alors $kQ/R \cong k^n$ est semi-simple.*

Démonstration. Supposons que $Q_0 = \{1, \ldots, n\}$. Soit $\{\varepsilon_i + R \mid i \in Q_0\}$ une $k - base$ de kQ/R. En effet, si $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(\varepsilon_i + R) = 0 + R$, avec $\lambda_i \in k$, alors $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varepsilon_i \in R$. Comme R a pour base l'ensemble des chemins non-triviaux, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varepsilon_i = \sum_{j=1}^{n} \mu_j q_j$, avec q_j des chemins non-triviaux, $\mu_j \in k$. Ce qui implique que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varepsilon_i - \sum_{j=1}^{n} \mu_j q_j = 0$. Or $\{\varepsilon_i,\ q_j\}$ est une famille libre puisque c'est une partie d'une base de kQ et donc, $\lambda_i = \mu_j = 0$. De plus, tout u dans kQ s'écrit $u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varepsilon_i + \sum_{j=1}^{n} \mu_j q_j$, où λ_i, μ_j dans k et q_j des chemins non triviaux. Or $\sum_{j=1}^{n} \mu_j q_j \in R$. Donc $u + R = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i \varepsilon_i + R)$. Ainsi, l'application

$$\begin{array}{rccc} f & : & kQ/R & \longrightarrow & k^n \\ & & \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(\varepsilon_i + R) & \longmapsto & (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \end{array}$$

est un isomorphisme de k-espaces vectoriels. En outre, pour tout $u = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i \varepsilon_i + R)$, $v = \sum_{j=1}^{n} (\mu_j \varepsilon_j + R)$ dans kQ/R, on a $uv = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i \varepsilon_i + R) \sum_{j=1}^{n} (\mu_j \varepsilon_j + R) = \sum_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}} (\lambda_i \varepsilon_i + R)(\mu_j \varepsilon_j + R) = \sum_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}} (\lambda_i \mu_j \varepsilon_i \varepsilon_j + R)$. Or

$$\varepsilon_i \varepsilon_j = \begin{cases} \varepsilon_i & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ce qui implique que $uv = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i \mu_i \varepsilon_i + R)$. Et donc

$$f(uv) = (\lambda_1 \mu_1, \ldots, \lambda_n \mu_n) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)(\mu_1, \ldots, \mu_n).$$

Donc $f(uv) = f(u)f(v)$. Ainsi, f est un isomorphisme d'algèbres. D'où $kQ/R \cong k \times \cdots \times k$. Or $rad(kQ) = R$. Alors $rad(kQ/R) = 0$. D'où l'algèbre quotient kQ/R est semi-simple.

□

Lemme 3.2.8. *Soient Q un carquois fini, R l'idéal de kQ engendré par les flèches de kQ et I un idéal admissible de kQ. Alors, $rad(A) = R/I = \{\sum_i \lambda_i(p_i + I) \mid p_i$ des chemins non triviaux$\}$.*

Démonstration. Comme I est un idéal admissible de kQ, il existe $m \geq 2$ tel que $R^m \subseteq I$. Par conséquent, $(R/I)^m = 0$. Donc R/I est un idéal nilpotent de kQ/I. Or, d'après la **proposition 3.2.7**, $(kQ/I)/(R/I) \cong kQ/R$ est isomorphe à un produit direct de copies de k. Donc, d'après la **proposition 2.6.12**, $rad(A) = R/I$.

Si p est un chemin non trivial, alors $p = \alpha q$, où α est une flèche. Ainsi, $p \in R$. Réciproquement, si $u \in R$, alors $u = \sum_i p_i \alpha_i q_i$, où α_i sont des flèches, p_i, q_i des chemins (peut-être triviaux). Mais $p_i \alpha_i q_i$ est toujours non trivial. Ainsi R se compose de combinaisons linéaires de chemins non triviaux.

□

Soit $A = kQ/I$ où Q est un carquois fini, avec $|Q_0| = n$, alors la catégorie $modA$ admet exactement n modules projectifs deux à deux non isomorphes. Ainsi, les modules projectifs P_a de $modA$ sont générés, en tant que k-espace vectoriel, par les classes modulo I de tous les chemins de Q à partir de a et sont donnés par $\{P_a = e_a A \mid a \in Q_0\}$. Par conséquent, les éléments de P_a sont de la forme $\sum_i \lambda_i (c_i + I)$, où c_i sont des chemins commençant en a et $\lambda_i \in k$.

Proposition 3.2.9. *Soit $A = kQ/I$ où Q est un carquois fini. Alors les P_a, avec $a \in Q_0$, sont les modules projectifs indécomposables deux à deux non isomorphes dans $modA$.*

Démonstration. Supposons que $Q_0 = \{1, 2, \ldots, n\}$. D'après la **proposition 3.3.1** (3), $P_i = Ae_i$ est projectif indécomposable pour tout i dans Q_0. Soit $u \in A$. Comme $1_A = e_1 + \cdots + e_n$, $u = u1_A = ue_1 + \cdots + ue_n$ où $ue_i \in Ae_i$. Supposons que $\sum_{i=1}^{n} u_i = 0$, où $u_i \in Ae_i$. Posons $u_i = x_i e_i$, où x_i est dans A. On a $u_i e_i = x_i e_i e_i = u_i$ et $u_i e_j = x_i e_i e_j = 0$, pour $j \neq i$. Donc, pour tout $j \in Q_0$, $(\sum_{i=1}^{n} u_i) e_j = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i e_j = u_j = 0$. Par conséquent $A = Ae_1 \oplus \cdots \oplus Ae_n$.

De plus, d'après le **lemme 2.3.6**, tout A-module projectif indécomposable de $modA$ est isomorphe à Ae_i, $i \in Q_0$. D'après la **proposition 3.2.7**, $kQ/R \cong k \times \cdots \times k$. Or $A/radA = (kQ/I)/(R/I) = kQ/R$. Puisque les Ae_i sont indécomposables, d'après la **proposition 2.3.3**, les e_i sont primitifs et donc d'après le **lemme 2.6.14**, A est sobre. Ainsi, $P_i = Ae_i$, où $i \in Q_0$, sont les projectifs indécomposables deux à deux non isomorphes de $modA$.

□

Lemme 3.2.10. *Soit $A = kQ/I$, où Q est un carquois et un idéal I admissible. Alors, $\{\varepsilon_a + I, \alpha + I \mid a \in Q_0, \alpha \in Q_1\}$ est libre.*

Démonstration. Posons $Q_0 = \{1, \dots, n\}$ et $Q_1 = \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$. Si $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(\varepsilon_i + I) + \sum_{j=1}^{r} \mu_j(\alpha_j + I) = 0$, avec $\lambda_i, \mu_j \in k$. Alors, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\varepsilon_i + \sum_{j=1}^{r} \mu_j\alpha_j \in I$. Comme $I \subseteq R^2$ et que R^2 est engendré par les chemins de Q de longueur au moins 2, la somme s'écrit $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\varepsilon_i + \sum_{j=1}^{r} \mu_j\alpha_j = \sum_{l=1}^{s} \delta_l p_l$, où p_l sont des chemins de longueur au moins 2 et $\delta_l \in k$. Ce qui implique que $\lambda_i = \mu_j = \delta_l = 0$ car les chemin sont linéairement indépendant dans kQ. Donc $\{\varepsilon_a + I, \alpha + I \mid a \in Q_0, \alpha \in Q_1\}$ est libre. □

3.3 Modules projectifs indécomposables et modules simples

Étant donnée une algèbre de carquois lié $A = kQ/I$, nous montrerons dans cette section que les A-modules simples, projectifs sont en bijection avec les sommets de Q.

Proposition 3.3.1. *Soit $A = kQ/I$ où Q est un carquois et I un idéal admissible de kQ. Pour tout point a dans Q_0, posons $P_a = Ae_a$, où $e_a = \varepsilon_a + I$. Alors,*
(1) $P_a = \{\sum_i \lambda_i(p_i + I) \mid \lambda_i \in k,\ p_i$ sont les chemins commençant en $a\}$.
(2) $radP_a = \{\sum_i \lambda_i(p_i + I) \mid \lambda_i \in k,\ p_i$ sont les chemins non triviaux commençant en $a\}$.
(3) P_a est projectif indécomposable.

Démonstration. (1) Soit $u \in P_a$. Alors, $u = \sum_i \lambda_i(p_i + I)e_a + \sum_i \gamma_i(q_i + I)e_a = \sum_i \lambda_i(p_i + I) + (0 + I) = \sum_i \lambda_i(p_i + I)$, où p_i sont des chemins commençant en a, q_i des chemins ne commençant pas en a et $\gamma_i, \lambda_i \in k$. Réciproquement, supposons que $u = \sum_i \lambda_i(p_i + I)$, où p_i sont des chemins commençant en a, $\lambda_i \in k$. On a $p_i + I = (p_i + I)(\varepsilon_a + I) = (p_i + I)e_a$. Donc $(p_i + I) \in Ae_a = P_a$. D'où $u \in P_a$.

(2) Soit $u \in radP_a$. D'après le **lemme 3.2.8**, $u = \sum_i \lambda_i(p_i + I)e_a + \sum_i \gamma_i(q_i + I)e_a = \sum_i \lambda_i(p_i + I) + (0 + I) = \sum_i \lambda_i(p_i + I)$, où p_i sont des chemins non triviaux commençant en a, q_i des chemins non triviaux ne commençant pas en a et $\gamma_i, \lambda_i \in k$. Réciproquement, supposons que $u = \sum_i \lambda_i(p_i + I)$, où p_i sont des chemins non triviaux commençant en a, $\lambda_i \in k$. On a $p_i + I = (p_i + I)(\varepsilon_a + I) = (p_i + I)e_a$. Donc $(p_i + I) \in (radA)e_a = radP_a$. D'où $u \in radP_a$.

(3) Soit $u = \lambda e_a + \sum_{i=1}^{n} \gamma_i(\alpha_i + I)$ dans e_aAe_a où α_i sont des cycles orientés de a vers a, λ et γ_i dans k. Soit $m \in \mathbb{N}$ tel que $R^m \subseteq I$. Alors, $(\sum_{i=1}^{n} \gamma_i(\alpha_i + I))^m = \sum_{i=1}^{t} \mu_i\beta_i + I$ où $t \geq n$, β_i sont des cycles orientés de a vers a de longueur au moins m. Donc β_i est dans R^m. Comme I est admissible, $R^m \subseteq I$. Ainsi, $\beta_i \in R^m \subseteq I$. D'où $(\sum_{i=1}^{n} \gamma_i(\alpha_i + I))^m = 0 + I$. Alors
Si $\lambda = 0$, u est nilpotent. Donc d'après le **lemme 2.6.11**, $e_a - u$ est inversible.
Si $\lambda \neq 0$, posons $u' = \frac{u}{\lambda} = e_a + \sum_{i=1}^{n} \frac{\gamma_i}{\lambda}(\alpha_i + I)$. Comme $\sum_{i=1}^{n} \frac{\gamma_i}{\lambda}(\alpha_i + I)$ est nilpotent, d'après le **lemme 2.6.11**, u' est inversible. Ce qui implique que $u = \lambda u'$ est inversible.

Par conséquent, en vertu de la **proposition 2.5.4** (2), l'algèbre e_aAe_a est locale. Or, d'après la **proposition 2.3.7** (2), $End(Ae_a) \cong e_aAe_a$. Comme e_aAe_a est locale, $End(Ae_a)$ l'est aussi et donc, d'après la **proposition 2.5.5**, Ae_a est indécomposable. De plus, comme e_a est un idempotent, d'après le **lemme 2.3.2**, $P_a = Ae_a$ est projectif.

□

Proposition 3.3.2. *Soit $A = kQ/I$ où Q est un carquois et I un idéal admissible de kQ. Pour tout point a de Q_0,*

(1) *$S_a = P_a/radP_a$ est simple et $\{e_a + radP_a\}$ en est k-base.*

(2) *La projection canonique $p_a : P_a \longrightarrow S_a$ est la couverture projective de S_a.*

Démonstration. (1) Soit $\lambda \in k$ tel que $\lambda(e_a + radP_a) = 0$. Alors, $\lambda e_a \in radP_a$. D'après la **proposition 3.3.1** (2), $\lambda e_a = \sum \mu_i(p_i + I)$, où p_i sont des chemins non triviaux commençant en a, $\mu_i \in k$. Alors, $\lambda\varepsilon_a - \sum_i \mu_i p_i$ est dans I. Donc $\lambda\varepsilon_a - \sum_i \mu_i p_i = \sum \nu_i q_i$, où q_i sont des chemins non triviaux de longueur au moins 2 commençant en a, $\nu_i \in k$. Par conséquent, $\lambda\varepsilon_a$ est une combinaison linéaire de chemins non triviaux. Posons $\lambda\varepsilon_a = \delta_1\rho_1 + \cdots + \delta_m\rho_m$, où ρ_i sont des chemins non triviaux deux à deux distincts. Alors, $\lambda\varepsilon_a - (\delta_1\rho_1 + \cdots + \delta_m\rho_m) = 0$. Donc $\lambda = 0$. D'où, la famille $\{e_a + radP_a\}$ est libre. Soit $u + radP_a \in P_a/radP_a$, où $u \in P_a$. D'après (1), $u = \sum_i \lambda_i(p_i + I) + \mu e_a$, où p_i sont des chemins non triviaux commençant en a, $\lambda_i, \mu \in k$. Alors, d'après (2), $u - \mu e_a \in radP_a$. Donc $\{e_a + radP_a\}$ est une k-base de S_a. De plus $\{e_a + radP_a\}$ est de dimension 1. Alors S_a est simple.

(2) Comme la projection canonique p_a est un épimorphisme avec $ker(p_a) = radP_a$, d'après le **lemme 2.6.8**, elle est une couverture projective.

□

Lemme 3.3.3. *([3], III. 2.1) Soit $A = kQ/I$ où Q est un carquois et I un idéal admis-*

sible de kQ. Alors, l'ensemble $\{S_a | a \in Q_0\}$ est un ensemble complet de représentants des classes d'isomorphisme des A-modules simples.

Proposition 3.3.4. *Soit $A = kQ/I$, où Q est un carquois et I est un idéal admissible de kQ. Soit S_a un A-module simple associé à un point a de Q.*

(1) *Si Q admet une flèche $\alpha : a \to b$, alors S_a est non projectif.*

(2) *Si Q admet une flèche $\beta : b \to a$, alors S_a est non injectif.*

Démonstration. (1) Supposons que Q a au moins un flèche $\alpha : a \to b$ et considérons la couverture projective $\pi_a : P_a \to S_a$. D'après le **lemme 3.2.10**, $\{\varepsilon_a + I, \alpha + I\}$ est libre. Donc la dimension de P_a est supérieure à 1. Ainsi, $\pi_a : P_a \to S_a$ n'est pas un isomorphisme. Supposons que S_a est projectif. D'après le **lemme 2.2.6**, π_a est une rétraction. Donc $P_a \cong ker\pi_a \oplus S_a$. Mais d'après la **proposition 3.3.1** (3) P_a est indécomposable. S_a est simple, donc non nul. Alors, $ker\pi_a = 0$. Ce qui implique que π_a est un monomorphisme. Comme π_a est un épimorphisme, π_a est un isomorphisme, absurde.

(2) Si Q admet une flèche $\beta : b \to a$, alors Q^o admet une flèche $\beta^o : a \to b$. D'après (1), S_a^o est non projectif. Considérons la dualité $D = Hom_k(-, k)\,;\, modA^o \longrightarrow modA$. Alors, $D(S_a^o) \cong S_a$. Comme S_a^o est non projectif, d'après la **proposition 2.9.2** (4), S_a est non injectif.

□

Proposition 3.3.5. *Soit $A = kQ$, où Q est un carquois acyclique. Si a dans Q_0, alors*

(1) *$End_A(S_a) = k\langle id\rangle$.*

(2) *$End_A(P_a) = k\langle id\rangle$.*

Démonstration. (1) Soit $f : S_a \longrightarrow S_a$ un morphisme A-linéaire. Comme $\{\varepsilon_a + radP_a\}$ est une base de S_a, $f(\varepsilon_a + radP_a) = \mu(\varepsilon_a + radP_a)$, où $\mu \in k$ et tout élément u de S_a s'ecrit $u = \lambda(\varepsilon_a + radP_a)$, où $\lambda \in k$. Donc $f(u) = f(\lambda(\varepsilon_a + radP_a)) = \lambda f(\varepsilon_a + radP_a) = \lambda\mu(\varepsilon_a + radP_a)$. Alors $f(u) = \mu\lambda(\varepsilon_a + radP_a) = (\mu id)(u)$. D'où $f = \mu id$.

(2) Soit $f : P_a \longrightarrow P_a$ un morphisme A-linéaire. Comme $\varepsilon_a^2 = \varepsilon_a$ est dans P_a, on a $f(\varepsilon_a) = f(\varepsilon_a^2) = \varepsilon_a f(\varepsilon_a)$ est dans $\varepsilon_a P_a$. Comme Q est acyclique, $\varepsilon_a P_a = k\langle\varepsilon_a\rangle$. Ainsi $f(\varepsilon_a) = \mu\varepsilon_a$, où $\mu \in k$. Pour tout u dans P_a, on a $u = u\varepsilon_a$. Donc donne $f(u) = uf(\varepsilon_a) = u\mu\varepsilon_a = \mu u\varepsilon_a = \mu u = (\mu id)(u)$. D'où, $f = \mu id$. □

3.4 Représentations de carquois liés

Étant donnée une algèbre de carquois $A = kQ/I$, nous étudions dans cette section les liens qui existent entre la catégorie des modules $modA$ sur l'algèbre A et la catégorie des représentations $rep(Q, I)$ du carquois (Q, I).

Soient (Q, I) un carquois lié et $\omega_1, \ldots, \omega_m$ des chemins de Q de mêmes sources et de mêmes buts et de longueur au moins 2. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ des éléments non nuls de k. L'élément $\omega = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i\omega_i \in I$ s'appelle une ***relation*** sur Q.

Définition 3.4.1. *Soit (Q, I) un carquois lié.*

(1) *Une **représentation** de (Q, I) est définie telle que :*

(i) *à chaque point a de Q, on associe un $k-$espace vectoriel M_a,*

(ii) *à chaque flèche $\alpha : a \to b$ de Q, on associe une application k-linéaire $\rho_\alpha : M_a \longrightarrow M_b$,*

(iii) *Pour toute relation* $\omega = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \alpha_{i,m_i} \dots \alpha_{i,1}$*, où* $\lambda_i \in k$ *et* $\alpha_{i,j} \in Q_1$*, on a* $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i M(\alpha_{i,m_i}) \circ \cdots \circ M(\alpha_{i,1}) = 0$.

Une telle représentation est notée par $M = (M_a, \rho_\alpha)_{a \in Q_0, \alpha \in Q_1}$*. Une représentation est dite de dimension finie si chaque espace vectoriel* M_a *est de dimension finie.*

(2) *Soient* $M = (M_a, \rho_\alpha)$ *et* $M' = (M'_a, \rho'_\alpha)$ *deux représentations de* Q*. Un* ***morphisme de représentations*** $f : M \longrightarrow M'$ *est la donnée d'une famille de morphismes k-linéaires* $(f_a : M_a \longrightarrow M'_a)_{a \in Q_0}$ *telle que, pour toute flèche* $\alpha : a \to b$ *de* Q*, on a* $\rho'_\alpha f_a = f_b \rho_\alpha$*. C'est-à-dire que le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{tikzcd} M_a \arrow[r, "\rho_\alpha"] \arrow[d, "f_a"] & M_b \arrow[d, "f_b"] \\ M'_a \arrow[r, "\rho'_\alpha"] & M'_b \end{tikzcd}$$

Si $f : M \longrightarrow M'$ *et* $f' : M' \longrightarrow M''$ *sont deux morphismes de représentations d'un même carquois* Q*, on définit leur composition par* $f'f = (f'_a f_a)_{a \in Q_0}$*. Alors la catégorie de représentations du carquois* Q *est notée par* $Rep(Q, I)$ *et celle des représentations de dimension finie est noté par* $rep(Q, I)$*.*

Exemple 3.4.2. *Soit* Q *le carquois*

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[dr, "\alpha"] & & \\ & 2 \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\gamma"'] & 3 \\ & 4 & \end{tikzcd}$$

lié par l'idéal admissible $I = \langle \gamma\alpha \rangle$*. Alors*

$$\begin{tikzcd}
k^2 \arrow[dr, "{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}}"] & & \\
& k \arrow[r, "{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}"] \arrow[d, "0"'] & k^3 \\
& k &
\end{tikzcd}$$

est une représentation de (Q, I).

On peut donc énoncer le résultat suivant qui est dû à Gabriel et dont la démonstration se trouve dans [3].

Théorème 3.4.3. *([3], III. 1.6.) Soit* $A = kQ/I$*, où* Q *est un carquois fini et* I *un idéal admissible de* kQ*. Il existe une équivalence de catégories* $E : modA \xrightarrow{\simeq} rep(Q, I)$.

Remarque 3.4.4. *La représentation k-linéaire* $E(M) = (M_a, \rho_\alpha)_{a \in Q_0, \alpha \in Q_1}$ *est définie, pour tout* $M \in modA$*, par :*

(1) *Si* a *est dans* Q_0*, soit* $e_a = \varepsilon_a + I$ *l'idempotent primitif correspondant dans* kQ/I*. Alors* $M_a = e_a M$.

(2) *Si* $\alpha : a \to b$ *est dans* Q_1 *et* $\bar{\alpha} = \alpha + I$ *est sa classe modulo* I*, alors on définit* $\rho_\alpha : M_a \longrightarrow M_b$ *par* $\rho_\alpha(x) = \bar{\alpha}x = e_b \bar{\alpha} e_a x$*, pour tout* x *dans* M_a.

Étant donné un carquois Q, la proposition suivante montre qu'il existe une bijection entre les sommets de Q et les A-modules simples, projectifs et injectifs.

Proposition 3.4.5. *([3], III.2). Soit $A = kQ/I$, où Q est un carquois fini et I un idéal admissible de kQ. Soit a un point de Q.*

(1) *Le A-module S_a est donné par la représentation $S_a = (S_a(b), S_a(\alpha))$, où*

$$S_a(b) = \begin{cases} k & \text{si } a = b, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$S_a(\alpha) = 0$, pour tout $\alpha \in Q_1$.

(2) *Le A-module projectif indécomposable P_a est donné par la représentation $P_a = (P_a(b), P_a(\alpha))$, telle que $P_a(b)$ est le k-espace vectoriel ayant pour base un ensemble de classes $\bar{\rho} = \rho + I$, où ρ est un chemin de a vers b, et pour une flèche $\alpha : b \to c$, on définit $P_a(\alpha) : P_a(b) \longrightarrow P_a(c)$ comme étant la multiplication à gauche par $\bar{\alpha} = \alpha + I$.*

(3) *Le A-module injectif indécomposable I_a est donné par la représentation $I_a = (I_a(b), I_a(\alpha))$ telle que $I_a(b)$ est le dual du k-espace vectoriel ayant pour base un ensemble de classes $\bar{\rho} = \rho + I$, où ρ est un chemin de b vers a, et pour une flèche $\alpha : b \to c$, on définit $I_a(\alpha) : I_a(b) \longrightarrow I_a(c)$ comme étant l'application duale de la multiplication à gauche par $\bar{\alpha} = \alpha + I$.*

Exemple 3.4.6. *Soit $A = kQ$, où Q est le carquois $1\bullet \xrightarrow{\alpha} \bullet 2$. Alors*

(1) *$E(P_1) = (M_a, \varphi_\alpha)$ est la représentation k-linéaire de $P_1 = A\varepsilon_1$, où M_a est défini ainsi :*

si $a = 1$, $M_1 = \varepsilon_1 \langle A \rangle \varepsilon_2 = k\langle \varepsilon_1 \rangle$,

si $a = 2$, $M_2 = \varepsilon_2 \langle A \rangle \varepsilon_1 = k\langle \alpha \rangle$,

et φ_α est défini comme suit :

$$\begin{array}{cccc} \varphi_\alpha & : & k\langle \varepsilon_1 \rangle & \longrightarrow & k\langle \alpha \rangle \\ & & x\varepsilon_1 & \longmapsto & x\alpha \end{array}$$

Donc $k\langle\varepsilon_1\rangle \xrightarrow{\varphi_\alpha} k\langle\alpha\rangle$ *est une représentation correspondante de* P_1. *Ainsi,*

$$\begin{tikzcd} k\langle\varepsilon_1\rangle \arrow[r, "\varphi_\alpha"] \arrow[d, "f_1"] & k\langle\alpha\rangle \arrow[d, "f_2"] \\ k \arrow[r] & k \end{tikzcd}$$

où $\begin{array}{cccccc} f_1 & : & k\langle\varepsilon_1\rangle & \longrightarrow & k \\ & & \lambda\varepsilon_1 & \longmapsto & \lambda \end{array}$ *et* $\begin{array}{cccccc} f_2 & : & k\langle\alpha\rangle & \longrightarrow & k \\ & & \mu\alpha & \longmapsto & \mu \end{array}$, *est un isomorphisme de représentations.*

(2) $E(radP_1) = (J_a, \varphi_\alpha)$ *est la représentation* k*-linéaire de* $radP_1 = k\langle\alpha\rangle$, *où* J_a *est défini ainsi :*

si $a = 1,\ J_1 = 0,$

si $a = 2,\ J_2 = k\langle\alpha\rangle,$

et φ_α *est défini comme suit :*

$$\begin{array}{ccccc} \varphi_\alpha & : & 0 & \longrightarrow & k\langle\alpha\rangle \\ & & 0 & \longmapsto & 0 \end{array}$$

Donc $0 \xrightarrow{\varphi_\alpha} k\langle\alpha\rangle$ *est une représentation correspondante de* $radP_1$. *Ainsi,*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, "\varphi_\alpha"] \arrow[d, "f_1"] & k\langle\alpha\rangle \arrow[d, "f_2"] \\ 0 \arrow[r] & k \end{tikzcd}$$

où $\begin{array}{ccccc} f_1 & : & 0 & \longrightarrow & 0 \\ & & 0 & \longmapsto & 0 \end{array}$ *et* $\begin{array}{ccccc} f_2 & : & k\langle\alpha\rangle & \longrightarrow & k \\ & & \lambda\alpha & \longmapsto & \lambda \end{array}$, *est un isomorphisme de représentation.*

(3) $E(P_2) = (M_a, \varphi_\alpha)$ *est la représentation* k*-linéaire de* $P_2 = A\varepsilon_2$, *où* M_a *est défini ainsi :*

si $a = 1,\ M_1 = \varepsilon_1\langle A\rangle\varepsilon_2 = 0,$

si $a = 2,\ M_2 = \varepsilon_2\langle A\rangle\varepsilon_2 = k\langle\varepsilon_2\rangle,$

et φ_α *est défini comme suit :*

$$\begin{array}{ccccc} \varphi_\alpha & : & 0 & \longrightarrow & k\langle\varepsilon_2\rangle \\ & & 0 & \longmapsto & 0 \end{array}$$

Donc $0 \xrightarrow{\varphi_\alpha} k\langle\varepsilon_2\rangle$ *est une représentation correspondante de* P_2*. Ainsi,*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, "\varphi_\alpha"] \arrow[d, "f_1"] & k\langle\varepsilon_2\rangle \arrow[d, "f_2"] \\ 0 \arrow[r] & k \end{tikzcd}$$

où $\begin{array}{cccc} f_1 & : & 0 & \longrightarrow & 0 \\ & & 0 & \longmapsto & 0 \end{array}$ *et* $\begin{array}{ccccc} f_2 & : & k\langle\varepsilon_2\rangle & \longrightarrow & k \\ & & \mu\varepsilon_2 & \longmapsto & \mu \end{array}$*, est un isomorphisme de représentation.*

CHAPITRE 4

Théorie d'Auslander-Reiten

Au chapitre précédent, nous avons vu quelques techniques de la théorie des carquois permettant de visualiser les algèbres de dimension finie et leurs modules. Cependant, pour calculer réellement les modules indécomposables et les morphismes entre eux, nous présenterons dans ce chapitre d'autres outils utiles de la Théorie d'Auslander-Reiten. En particulier, l'existence de suites presque scindées dans $modA$ et les morphismes irréductibles.

Partout dans ce chapitre, A est une k-algèbre de dimension finie, les A-modules sont de type fini et les morphismes sont dans $modA$. Les définitions et résultats sont issus de [3, 2, 11, 8, 6].

4.1 Morphismes irréductibles

Définition 4.1.1. *Un morphisme $f : X \longrightarrow Y$ de A-modules est dit* ***irréductible*** *si :*

(1) *si f n'est ni section, ni rétraction,*

(2) *s'il existe des morphismes f_1, f_2 tels que $f = f_1 f_2$ alors, f_1 est une rétraction ou f_2 est une section.*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "f_2"'] & & Y \\
& Z \arrow[ur, "f_1"'] &
\end{tikzcd}$$

Lemme 4.1.2. *Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme irréductible dans $modA$.*

(1) *Si $g : Y \longrightarrow Y'$ est un isomorphisme, alors $h = gf$ est irréductible.*

(2) *Si $g : X' \longrightarrow X$ est un isomorphisme, alors $h = fg$ est irréductible.*

Démonstration. (1) Si h est une rétraction, alors il existe $h' : Y' \longrightarrow X$ tel que $hh' = \mathrm{id}_{Y'}$. Donc $gfh' = \mathrm{id}_{Y'}$ implique que $fh' = g^{-1}$. D'où $fh'g = \mathrm{id}_{Y'}$. Ce qui est absurde car f n'est pas une rétraction. Donc h n'est pas une rétraction. Si h est une section, alors il existe $h' : Y' \longrightarrow X$ tel que $h'h = \mathrm{id}_X$. Donc $h'gf = \mathrm{id}_X$. Ce qui est absurde car f n'est pas une section. Donc h n'est pas une section. Posons $h = h_1 h_2$, où $h_1 : Z \longrightarrow Y'$ et $h_2 : X \longrightarrow Z$ pour un Z dans $modA$. Alors $h = h_1 h_2 = gf$ implique que $f = g^{-1} h_1 h_2$.

Si h_2 n'est pas une section, comme $f = g^{-1} h_1 h_2$ est irréductible, $g^{-1} h_1$ est une rétraction. Donc, puisque g^{-1} est une rétraction, par le **lemme 1.1.17** (2), h_1 est une rétraction.

Par conséquent, h est irréductible.

(2) Si h est une section, alors il existe $h' : Y \longrightarrow X'$ tel que $h'h = \mathrm{id}_{X'}$. Donc $h'fg = \mathrm{id}_{X'}$ implique que $h'f = g^{-1}$. D'où $gh'f = \mathrm{id}_{X'}$. Ce qui est absurde car f n'est pas une section. Donc h n'est pas une section. Si h est une rétraction, alors il existe $h' : Y \longrightarrow X'$ tel que

$hh' = \mathrm{id}_Y$. Donc $fgh' = \mathrm{id}_Y$. Ce qui est absurde car f n'est pas une rétraction. Donc h n'est pas une rétraction. Posons $h = h_1 h_2$, où $h_1 : Z \longrightarrow Y$ et $h_2 : X' \longrightarrow Z$ pour un Z dans $modA$. Alors $h = h_1 h_2 = fg$ implique que $f = h_1 h_2 g^{-1}$.

Si h_1 n'est pas une rétraction, comme $f = h_1 h_2 g^{-1}$ est irréductible, $h_2 g^{-1}$ est une section. Donc, puisque g^{-1} est une section, par le **lemme 1.1.17** (1), h_1 est une section.

Par conséquent, h est irréductible.

□

Lemme 4.1.3. *Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme irréductible. Alors, f est un monomorphisme ou f est un épimorphisme.*

Démonstration. Soit $f = jp$ la factorisation canonique de f

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & Y \\ & Imf \arrow[ur, "j"'] & \end{tikzcd}$$

où p la surjection canonique et j l'injection canonique. Comme f est irréductible, p est une section ou j est une rétraction.

Si p est une section, alors p est un monomorphisme, jp l'est aussi. Par conséquent, f est un monomorphisme.

Si j est une rétraction, alors j est un épimorphisme, jp l'est aussi. Par conséquent, f est un épimorphisme.

□

Lemme 4.1.4. *Soient L, M des A-modules indécomposables. Un morphisme $f : L \longrightarrow M$ est irréductible si et seulement si, $f \in rad(L, M) \backslash rad^2(L, M)$.*

Démonstration. Nécessité. Supposons que f est irréductible. Alors, par le **lemme 4.1.3** f est un monomorphisme ou f est un épimorphisme. Comme L et M sont indécomposables, alors d'après la **proposition 2.7.1** (3), $f \in rad(L,M)$. D'autre part, comme toute décomposition $f = gh$ de f est telle que $h : L \longrightarrow N$ est une section ou $g : N \longrightarrow M$ est une rétraction, alors d'après la **proposition 2.7.1** $h \notin rad(L,N)$ et $g \notin rad(N,M)$. Et par la **proposition 1.2.3**, $f \notin rad^2(L,M)$.

Suffisance. Supposons que $f \in rad(L,M)\backslash rad^2(L,M)$. Alors, $f \in rad(L,M)$ implique que f n'est ni section, ni rétraction, d'après la **proposition 2.7.1**. De plus, $f \notin rad^2(L,M)$ implique que toute décomposition $f = gh$ de f est telle que $(h : L \longrightarrow N) \notin rad(L,N)$ ou $(g : N \longrightarrow M) \notin rad(N,M)$. Et d'après la **proposition 2.7.1**, g est une rétraction ou h est une section. Par conséquent, f est irréductible.

□

$Irr(M,N) := rad(M,N)\backslash rad^2(M,N)$ est appelé l'espace de morphismes irréductibles de M vers N.

Soit X un A-module indécomposable. En vertu de la **proposition 2.5.4** (3), $D_X = End(X)/rad(End(X))$ est un sur-corps. Ce qui nous mène à énoncer le résultat plus général qui suit :

Proposition 4.1.5. *([4], 3.4) Soient X, Y deux modules indécomposables et f_1, f_2 deux morphismes dans $rad(X,Y)$.*

(1) *Le morphisme $\begin{bmatrix} f_1 & f_2 \end{bmatrix} : X \oplus X \longrightarrow Y$ est irréductible si et seulement si les classes $f_1 + rad^2(X,Y), f_2 + rad^2(X,Y)$ sont linéairement indépendantes sur le sur-corps D_X de k.*

(2) *Le morphisme* $\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} : X \longrightarrow Y \oplus Y$ *est irréductible si et seulement si les classes* $f_1 + rad^2(X,Y), f_2 + rad^2(X,Y)$ *sont linéairement indépendantes sur le sur-corps* D_Y *de* k*.*

4.2 Morphismes presque scindés

Dans le but de décrire les A-modules indécomposables d'une algèbre A donnée et les morphismes entre eux, nous consacrons cette section à l'introduction du concept de morphismes presque scindés qui nous seront utiles pour la suite.

Définition 4.2.1. *Un morphisme* $f : X \longrightarrow Y$ *de* A*-modules est dit :*

(1) ***Minimal à gauche*** *si tout morphisme* $h \in End(Y)$ *tel que* $hf = f$ *est un automorphisme.*

(2) ***Minimal à droite*** *si tout morphisme* $p \in End(X)$ *tel que* $fp = f$ *est un automorphisme.*

(3) ***Presque scindé à gauche*** *si* f *n'est pas une section et pour tout morphisme* $u : X \longrightarrow Z$ *qui n'est pas une section, il existe un morphisme* $u' : Y \longrightarrow Z$ *tel que* $u'f = u$*.*

(4) ***Presque scindé à droite*** *si* f *n'est pas une rétraction et pour tout morphisme* $v : Z \longrightarrow Y$ *qui n'est pas une rétraction, il existe un morphisme* $v' : Z \longrightarrow X$ *tel que* $fv' = v$*.*

(5) ***Minimal presque scindé à gauche*** *si* f *est à la fois minimal à gauche et presque scindé à gauche.*

(6) ***Minimal presque scindé à droite*** *si* f *est à la fois minimal à droite et presque scindé à droite.*

Le résultat suivant donne un lien étroit, dans $modA$, entre les morphismes presque scindés et les A-modules indécomposables :

Lemme 4.2.2. *Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme dans $modA$.*

(1) *Si f est presque scindé à gauche, alors X est indécomposable,*

(2) *Si f est presque scindé à droite, alors Y est indécomposable.*

Démonstration. (1) Supposons que f est presque scindé à gauche et que $X = X_1 \bigoplus X_2$ où X_1 et X_2 sont des A-modules non nuls. Soient $p_i : X \longrightarrow X_i$ et $q_i : X_i \longrightarrow X$ pour $(i = 1, 2)$, les projections et l'inclusions canoniques correspondantes. Alors, pour tout $i = 1, 2$, p_i n'est pas une section. Et comme f est presque scindé à gauche, alors il existe un morphisme $u_i : Y \longrightarrow X_i$ tel que $u_i f = p_i$. Comme p_i et q_i sont telles que

$$p_i q_i = \begin{cases} 1_{X_i} & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et $1_X = q_1 p_1 + q_2 p_2$, alors $u = \left(\begin{smallmatrix} u_1 \\ u_2 \end{smallmatrix}\right) = \sum_{i=1}^{2} q_i u_i : Y \longrightarrow X$. Et donc $uf = \sum_{i=1}^{2} q_i u_i f = \sum_{i=1}^{2} q_i p_i = 1_X$. Ce qui est une contradiction car f n'est pas une section. Donc X est indécomposable.

(2) Supposons que f est presque scindé à droite et que $Y = Y_1 \bigoplus Y_2$ où Y_1 et Y_2 sont des A-modules non nuls. Soient $p_i : Y \longrightarrow Y_i$ et $q_i : Y_i \longrightarrow Y$ pour $(i = 1, 2)$, les projections et l'inclusions canoniques correspondantes. Alors, pour tout $i = 1, 2$, q_i n'est pas une rétraction. Et comme f est presque scindé à droite, alors il existe un morphisme $v_i : Y_i \longrightarrow X$ tel que $q_i = f v_i$. Comme p_i et q_i sont telles que

$$p_i q_i = \begin{cases} 1_{Y_i} & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et $1_Y = q_1p_1 + q_2p_2$, alors $v = (v_1, v_2) = \sum_{i=1}^{2} v_ip_i : Y \longrightarrow X$. Et donc $fv = \sum_{i=1}^{2} fv_ip_1 = \sum_{i=1}^{2} q_ip_1 = 1_Y$. Ce qui est une contradiction car f n'est pas une rétraction. Donc Y est indécomposable.

□

Théorème 4.2.3. *Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme non nul dans $modA$.*

(1) *Si f est minimal presque scindé à droite, alors f est irréductible.*

(2) *Si f est minimal presque scindé à gauche, alors f est irréductible.*

Démonstration. (1) Supposons que f est minimal presque scindé à droite. Alors, f n'est pas une rétraction et d'après le **lemme 4.2.2** (2), Y est indécomposable. Donc la **proposition 2.7.1** (2) implique que $f \in rad(X, Y)$. Si f est une section, il existe $g : Y \longrightarrow X$ tel que $gf = 1_X$. Donc $1_X - gf = 0$ n'est pas inversible. Ce qui est absurde car $f \in rad(X, Y)$. Donc f n'est pas une section. Supposons que $f = f_1f_2$ avec $f_1 : Z \longrightarrow Y$, $f_2 : X \longrightarrow Z$, pour un Z dans $modA$.

> Supposons que f_1 n'est pas une rétraction. Comme f est presque scindé à droite, il existe $f_1' : Z \longrightarrow X$ tel que $f_1 = ff_1'$. D'où $f = f_1f_2 = ff_1'f_2$. Comme f est minimal à droite, alors $f_1'f_2$ est un automorphisme. Donc f_2 est une section.

Par conséquent, f est irréductible.

(2) Supposons que f est minimal presque scindé à gauche. Alors, f n'est pas une section et d'après le **lemme 4.2.2** (1), X est indécomposable. Donc la **proposition 2.7.1** (1) implique que $f \in rad(X, Y)$. Si f est une rétraction, il existe $g : Y \longrightarrow X$ tel que $fg = 1_Y$. Donc $1_Y - fg = 0$ n'est pas inversible. Ce qui est absurde car $f \in rad(X, Y)$. Donc f n'est

pas une rétraction. Supposons que $f = f_1 f_2$ avec $f_1 : Z \longrightarrow Y$, $f_2 : X \longrightarrow Z$, pour un Z dans $modA$.

Si f_2 n'est pas une section. Comme f est presque scindé à gauche, il existe $f_2' : Y \longrightarrow Z$ tel que $f_2 = f_2' f$. D'où $f = f_1 f_2 = f_1 f_2' f$. Comme f est minimal à gauche, alors $f_1 f_2'$ est un automorphisme. Donc f_1 est une rétraction.

Par conséquent, f est irréductible.

□

Proposition 4.2.4. *([3], IV. 1.2)*

(1) *Si les morphismes $f : X \longrightarrow Y$ et $f' : X \longrightarrow Y'$ sont minimaux presque scindés à gauche, alors il existe un isomorphisme $h : Y \longrightarrow Y'$ tel que $f' = hf$.*

(2) *Si les morphismes $g : M \longrightarrow N$ et $g' : M' \longrightarrow N$ sont minimaux presque scindés à droite, alors il existe un isomorphisme $u : M \longrightarrow M'$ tel que $g = g'u$.*

Lemme 4.2.5. *Si Y est indécomposable et non projectif, alors un morphisme minimal presque scindé à droite $f : X \longrightarrow Y$ est un épimorphisme.*

Démonstration. Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme minimal presque scindé à droite. Comme Y n'est pas projectif, alors il existe un épimorphisme $g : P \longrightarrow Y$ qui n'est pas une rétraction. D'après la définition un morphisme minimal presque scindé à droite, $g = fh$ pour un morphisme $h : P \longrightarrow X$. Comme g est un épimorphisme, alors f est aussi un épimorphisme.

□

Lemme 4.2.6. *Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme dans $modA$. Posons $h = gf$ et $p = fq$ où $g : Y \longrightarrow Y'$ et $q : Y' \longrightarrow X$ sont des isomorphismes.*

(1) *Si f est un morphisme minimal presque scindé à gauche, alors h et p le sont aussi.*

(2) *Si f est un morphisme minimal presque scindé à droite, alors h et p le sont aussi.*

Démonstration. (1) Supposons que f est minimal presque scindé à gauche. Soit $u \in End(Y')$ tel que $uh = h$. Donc $ugf = gf$, car $h = gf$. Ce qui implique que $g^{-1}ugf = f$. Comme f est minimal à gauche, $g^{-1}ug$ est un automorphisme et donc u est un automorphisme car g est un isomorphisme. D'où h est minimal à gauche. Supposons que h est une section. Alors il existe $h' \in Hom_A(Y', X)$ tel que $h'h = \mathrm{id}_X$. Donc $h'gf = \mathrm{id}_X$. Ce qui est absurde car f n'est pas une section. Soit $u : X \longrightarrow Z$ un morphisme qui n'est pas une section. Comme f est presque scindé à gauche, il existe un morphisme $v : Y \longrightarrow Z$ tel que $u = vf$. Donc il existe un morphisme $v' = vg^{-1} : Y' \longrightarrow Z$ tel que $u = v'h$. D'où h est presque scindé à gauche. Par conséquent h est minimal presque scindé à gauche.

(2) Supposons que f est presque scindé à droite. Soit $p \in End_A(X)$ tel que $hp = h$. Donc $gfp = gf$ car $h = gf$. Ce qui implique que $fp = f$. Donc p est un automorphisme car f est minimal à droite. D'où h est minimal à droite. Supposons que h est une rétraction. Alors il existe $h' \in Hom_A(Y', X)$ tel que $hh' = \mathrm{id}_{Y'}$. Donc $gfh' = \mathrm{id}_{Y'}$ implique que $fh'g = \mathrm{id}_Y$. Ce qui est absurde car f n'est pas une rétraction. Donc h ne l'est pas. Soit $u : Z \longrightarrow Y'$ un morphisme qui n'est pas une rétraction. Comme f est presque scindé à droite et $g^{-1}u$ n'est pas une rétraction, il existe $v : Z \longrightarrow X$ tel que $g^{-1}u = fv$. Ce qui implique que $u = gfv = hv$. Donc h est presque scindé à droite.

□

Le résultat suivant donne le lien entre les morphismes minimaux presque scindés et les morphismes irréductibles.

Théorème 4.2.7. *([2], Théorème IV.1.10.)*

(1) *Soit* $f : M \longrightarrow N$ *un morphisme minimal presque scindé à gauche dans* mod$A$. *Un morphisme non nul* $g : M \longrightarrow X$ *est irréductible si et seulement si* $g = hf$, *où* $h : N \longrightarrow X$ *est une rétraction.*

(2) *Soit* $f : M \longrightarrow N$ *un morphisme minimal presque scindé à droite dans* mod$A$. *Un morphisme non nul* $g : X \longrightarrow N$ *est irréductible si et seulement si* $g = fh$, *où* $h : X \longrightarrow M$ *est une section.*

Le corollaire suivant montre que, dans certains cas, les morphismes irréductibles peuvent être des composants de morphismes minimaux presque scindés.

Corollaire 4.2.8.

(1) *Soit* $f : M \longrightarrow N$ *un morphisme minimal presque scindé à gauche. Alors, il existe un morphisme irréductible* $g : M \longrightarrow L$ *si et seulement si* L *est un facteur direct non nul de* N.

(2) *Soit* $f : M \longrightarrow N$ *un morphisme minimal presque scindé à droite. Alors, il existe un morphisme irréductible* $g : L \longrightarrow N$ *si et seulement si* L *est un facteur direct non nul de* M.

Démonstration. (1) *Nécessité.* Supposons que $g : M \longrightarrow L$ est un morphisme irréductible. D'après le **théorème 4.2.7** (1), $g = fh$, où $h : N \longrightarrow L$ est une rétraction non nulle. D'après le **lemme 2.1.7** (3), L est un facteur direct de N.

Suffisance. Supposons que L est facteur direct non nul de N. Alors, la projection canonique $p : N \longrightarrow L$ est une rétraction non nulle . Considérons $g = pf$. Comme p est une rétraction, d'après le **théorème 4.2.7** (1), g est irréductible.

(2) *Nécessité.* Supposons que $g : L \longrightarrow N$ est un morphisme irréductible. D'après le **théorème 4.2.7** (2), $g = hf$, où $h : L \longrightarrow M$ est une section non nulle. D'après le **lemme 2.1.7** (2), L est un facteur direct de M.

Suffisance. Supposons que L est facteur direct non nul de M. Alors, l'injection canonique $q : L \longrightarrow M$ est une section non nulle . Considérons $g = fq$. Comme q est une section, d'après le **théorème 4.2.7** (2), g est irréductible.

$\square$

Lemme 4.2.9.

(1) *Soit P un module projectif indécomposable. L'inclusion $i : radP \longrightarrow P$ est minimal presque scindée à droite.*

(2) *Soit I un module injectif indécomposable. La projection $j : I \longrightarrow I/socI$ est minimal presque scindée à gauche.*

Démonstration. (1) Supposons que P est projectif. Soit $v : V \longrightarrow P$ un morphisme radical. Alors v n'est pas une rétractation. Comme P est projectif, v est non-surjectif. Par conséquent, $Imv \subseteq radP$ et donc il existe $v' : V \longrightarrow radP$ tel que $v = iv'$.

(2) Supposons que I est injectif. Soit $h : I \longrightarrow L$ un morphisme qui n'est pas une section. Comme h n'est pas injectif, $Kerh$ est non nul. Or $socI$ est essentiel dans I, donc $Kerh \cap socI$ est non nul. Mais $socI$ est simple, et donc $socI \subseteq Kerh$. D'où $h(socI) = 0$ et h se factorise par $I/socI$. Donc il existe $u : I/socI \longrightarrow L$ tel que $h = uj$.

□

Corollaire 4.2.10.

(1) *Soit P un module projectif indécomposable dans mod$A$. Si X est un facteur direct non nul de $radP$, alors il existe un monomorphisme irréductible $f : X \longrightarrow P$.*

(2) *Soit I un module injectif indécomposable dans mod$A$. Si Y est un facteur direct non nul de $I/socI$, alors il existe un épimorphisme irréductible $g : I \longrightarrow Y$.*

Démonstration. (1) Soit X un facteur direct non nul de $radP$. Alors, l'injection canonique $q : X \longrightarrow radP$ est une section non nulle . Considérons $f = jq$, où $j : radP \longrightarrow P$. D'après le **lemme** 4.2.9 (1), j est presque scindée à droite. Donc, d'après le **théorème** 4.2.7 (2), f est irréductible.

(2) Soit Y un facteur direct non nul de $I/socI$. Alors, la projection canonique $p : I/socI \longrightarrow Y$ est une rétraction, donc non nulle. Considérons $g = pi$, où $i : I \longrightarrow I/socI$. D'après le **lemme** 4.2.9 (2), i est presque scindée à gauche. Donc, d'après le **théorème** 4.2.7 (1), g est irréductible. □

4.3 Suites presque scindées

Dans cette section, nous nous intéressons aux suites presque scindées qui sont particulièrement utiles dans la théorie de la représentation des algèbres.

Définition 4.3.1. *Une suite exacte courte* $0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ *est dite* ***presque scindée*** *si :*

(1) *f est minimal presque scindé à gauche, et*

(2) *g est minimal presque scindé à droite.*

Le théorème suivant donne plusieurs caractérisations équivalentes des suites presque scindées.

Théorème 4.3.2. *([3], IV.1.13.) Soit* $0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ *une suite exacte courte de A-modules. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) *la suite est presque scindée,*

(2) *L est indécomposable et g est presque scindé à droite,*

(3) *N est indécomposable et f est presque scindé à gauche,*

(4) *f est minimal presque scindé à gauche,*

(5) *g est minimal presque scindé à droite,*

(6) *L et N sont indécomposables, f et g sont irréductibles.*

Soient A une k-algèbre de dimension finie et D la dualité standard. Si M est dans $modA$, on note TrM la ***transposée*** de M (voir [3], section IV.2).

La ***translation d'Auslander-Reiten***, notée τ, dans $modA$ est définie par $\tau = DTr$ et la ***translation inverse***, τ^{-1}, est définie par $\tau^{-1} = TrD$.

Le théorème suivant, dû à Auslander et Reiten, montre l'existence des suites presque scindées dans $modA$ et nous donnent une caractérisation de celles-ci :

Théorème 4.3.3. *([3], IV3.1) Soient M et N des A-modules indécomposables.*

(1) *Si M est non-projectif, alors il existe une suite presque scindée*

$$0 \longrightarrow \tau M \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

(2) *Si N est non-injectif, alors il existe une suite presque scindée*

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow L' \longrightarrow \tau^{-1}N \longrightarrow 0$$

Corollaire 4.3.4. *Soit M un module indécomposable dans $modA$.*

(1) *Il existe un morphisme minimal presque scindé à droite $g : N \longrightarrow M$.*

(2) *Il existe un morphisme minimal presque scindé à gauche $f : M \longrightarrow N$.*

Démonstration. (1) Si M est non projectif. Alors, d'après le **théorème 4.3.3** (1), il existe une suite presque scindée $0 \longrightarrow \tau M \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow 0$. D'où l'existence d'un morphisme minimal presque scindé à droite $g : N \longrightarrow M$. Si M est projectif, d'après le **lemme 4.2.9** (1), il existe un morphisme presque scindé à droite $i : N \longrightarrow M$, avec $N = radM$.

(2) Si M est non injectif. Alors, d'après le **théorème 4.3.3** (2), il existe une suite presque scindée $0 \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow \tau^{-1}M \longrightarrow 0$. D'où l'existence d'un morphisme minimal presque scindé à gauche $g : M \longrightarrow N$. Si M est injectif, d'après le **lemme 4.2.9** (2), il existe un morphisme presque scindé à gauche $j : M \longrightarrow N$ avec $N = M/socM$.

□

Par le résultat suivant, on déduit que les composantes d'un morphisme irréductibles sont irréductibles :

Lemme 4.3.5. *Soit Si* $f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} : X \longrightarrow Y_1 \oplus Y_2$ *un morphisme irréductible dans* $\mathrm{mod}A$*, avec* X *indécomposable et* Y_1, Y_2 *non nuls. Alors* f_1, f_2 *sont irréductibles.*

Démonstration. D'après le **corollaire 4.3.4**, il existe un morphisme minimal presque scindé à gauche $g : X \longrightarrow Y$. D'après le **théorème 4.2.7** (2), $f = hg$, où $h : Y \longrightarrow Y_1 \oplus Y_2$ est rétraction. Posant $p_i : Y_1 \oplus Y_2 \longrightarrow Y_i$ la projection canonique, $f_i = p_i f = (p_i h) g$. D'après le **lemme 1.1.17** (2), $p_i h$ est rétraction. Donc, d'après le **théorème 4.2.7** (2), f_i est irréductible.

□

Lemme 4.3.6. *Soit* $f : X \longrightarrow Y$ *un morphisme irréductible.*

(1) *Si* Y *indécomposable, alors il existe un morphisme* $f' : X' \longrightarrow Y$ *tel que le morphisme* $\begin{bmatrix} f & f' \end{bmatrix} : X \oplus X' \longrightarrow Y$ *soit minimal presque scindé à droite.*

(2) *Si* X *indécomposable, alors il existe un morphisme* $f' : X \longrightarrow Y'$ *tel que le morphisme* $\begin{bmatrix} f \\ f' \end{bmatrix} : X \longrightarrow Y \oplus Y'$ *soit minimal presque scindé à gauche.*

Démonstration. (1) Supposons que Y est indécomposable. D'après le **corollaire 4.3.4** (1), il existe un morphisme minimal presque scindé à droite $g : L \longrightarrow Y$. Comme f n'est pas une rétraction, il existe un morphisme $h : X \longrightarrow L$ tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, dashed, "\exists h"'] \arrow[d, "f"] \\ L \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

On a $f = gh$. Comme f est irréductible et g n'est pas une rétraction, alors h n'est pas une section. Posons $X' = Coker h$. Alors, il existe $f' : X' \longrightarrow Y$ tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "h"] & L \arrow[r, "p"] \arrow[d, "g"'] & X' \arrow[dl, dashed, "\exists f'"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

On a $g = f'p$. D'où l'existence d'un morphisme minimal presque scindé à droite $(f, f') : X \oplus X' \longrightarrow Y$.

(2) Supposons que X est indécomposable. D'après le **corollaire 4.3.4** (2), il existe un morphisme minimal presque scindé à gauche $p : X \longrightarrow U$. Comme f n'est pas une section, il existe un morphisme $u : U \longrightarrow Y$ tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "p"] \arrow[d, "f"'] & U \arrow[dl, dashed, "\exists u"] \\ Y & \end{tikzcd}$$

On a $f = up$. Comme f est irréductible et p n'est pas une section, alors u n'est pas une rétraction. Posons $Y' = Ker u$. Alors, il existe $f' : X \longrightarrow Y'$ tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} Y' \arrow[r, "i"] & U \arrow[r, "u"] & Y \\ & X \arrow[u, "p"'] \arrow[ul, dashed, "\exists f'"] & \end{tikzcd}$$

On a $p = if'$. D'où l'existence d'un morphisme minimal presque scindé à gauche $\binom{f}{f'} : X \longrightarrow Y \oplus Y'$.

$\square$

Lemme 4.3.7. *Soit*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "v"] & Z \arrow[r] \arrow[d, "w"] & 0 \\
0 \arrow[r] & X' \arrow[r, "f'"] & Y' \arrow[r, "g'"] & Z' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

un diagramme commutatif de A-modules avec u, v, w des isomorphismes. Alors, la ligne d'en haut est une suite presque scindée si et seulement si celle d'en bas est une suite presque scindée.

Démonstration. Nécessité. Supposons que la suite d'en haut est presque scindée. Elle est donc exacte. Alors d'après le **lemme 2.1.5**, la suite d'en bas est exacte. Par la commutativité du diagramme, on a $f'u = vf$. Donc $f' = vfu^{-1}$. Posons $h = vf$. Comme f est minimal presque scindé à gauche et v un isomorphisme, d'après le **lemme 4.2.6** (1) $h = vf$ est minimal presque scindé à gauche. Et donc le **lemme 4.2.6** (1) implique que f' est minimal presque scindé à gauche. Donc la suite d'en bas est presque scindée.

Suffisance. Cela suit de ce que l'inverse d'un isomorphisme est un isomorphisme.

□

Lemme 4.3.8. *Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme irréductible. Si Y est indécomposable et non projectif, alors il existe une suite presque scindée :*

$$0 \longrightarrow \tau Y \xrightarrow{\begin{bmatrix} g \\ g' \end{bmatrix}} X \oplus X' \xrightarrow{\begin{bmatrix} f & f' \end{bmatrix}} Y \longrightarrow 0$$

Démonstration. Supposons que $f : X \longrightarrow Y$ est irréductible. D'après le **lemme 4.3.6**, il existe un morphisme $f' : X' \longrightarrow Y$ tel que le morphisme $\begin{bmatrix} f & f' \end{bmatrix} : X \oplus X' \longrightarrow Y$ soit minimal presque scindé à droite. D'après le **théorème 4.3.2**, la suite

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{\begin{bmatrix} g \\ g' \end{bmatrix}} X \oplus X' \xrightarrow{\begin{bmatrix} f & f' \end{bmatrix}} Y \longrightarrow 0$$

est presque scindée. Par conséquent, il existe un isomorphisme $h : \tau Y \xrightarrow{\sim} \mathrm{L}$ et un morphisme irréductible $gh : \tau Y \longrightarrow X$. $\square$

4.4 Carquois d'Auslander-Reiten

Maintenant que les concepts de morphismes irréductibles, de morphismes presque scindés et de suites presque scindées sont introduits, nous définissons, dans cette section, le carquois d'Auslander-Reiten.

Définition 4.4.1. *Soient A une k-algèbre de dimension finie sobre et connexe. Le* ***carquois d'Auslander-Reiten*** Γ_A *de A est défini comme suit :*

(1) *Les points de Γ_A sont les classes d'isomorphismes $[X]$ des A-modules indécomposables ;*

(2) *Pour tous points $[X]$, $[Y]$ de Γ_A, les flèches $[X] \longrightarrow [Y]$ sont en bijection avec les vecteurs de base du k-espace vectoriel $Irr(X, Y)$.*

Le résultat suivant découle immédiatement du **corollaire 4.2.8**.

Lemme 4.4.2. *Soit A une algèbre de dimension finie avec Γ_A le carquois d'Auslander-Reiten de A. Soient $f : L \longrightarrow M$ un morphisme minimal presque scindé à droite et $g : M \longrightarrow N$ un morphisme minimal presque scindé à gauche.*

(1) *Si X est un module dans Γ_A, alors Γ_A a une flèche $X \to M$ si et seulement X est facteur direct de L.*

(2) *Si Y est un module dans Γ_A, alors Γ_A a une flèche $M \to Y$ si et seulement si Y est facteur direct de N.*

Le lemme suivant donne un lien étroit entre les flèches de Γ_A et les modules projectifs et injectifs de $modA$:

Lemme 4.4.3. *Soient A une algèbre de dimension finie avec $M \longrightarrow N$ une flèche de Γ_A.*

(1) *$M \ncong N$.*

(2) *Si N est non projectif, alors il existe une flèche $\tau N \longrightarrow M$.*

(3) *Si M est non injectif, alors il existe une flèche $N \longrightarrow \tau^{-1} M$.*

Démonstration. Par définition du carquois d'Auslander-Reiten, il existe un morphisme irréductible $f : M \longrightarrow N$. En particulier, f n'est pas un isomorphisme.

(1) Puisque M est de dimension finie, $dim(M) = dim(Imf) + dim(kerf)$.

Si f est un épimorphisme, alors f n'est pas un monomorphisme, et donc $ker(f)$ est non nul. D'où $dim(M) > dim(N)$.
Si f est un monomorphisme, alors $dim(M) = dim(Imf)$. Comme f n'est pas un épimorphisme $dim(Imf) < dim(N)$. D'où $dim(M) < dim(N)$.

Par conséquent, M n'est pas isomorphe à N.

(2) D'après le **lemme 4.3.8**, il existe une suite presque scindée

$$0 \longrightarrow \tau N \xrightarrow{\begin{bmatrix} g \\ g' \end{bmatrix}} M \oplus M' \xrightarrow{\begin{bmatrix} f & f' \end{bmatrix}} N \longrightarrow 0$$

Alors, comme $\begin{bmatrix} g \\ g' \end{bmatrix} : \tau N \longrightarrow M \oplus M'$ est minimal presque scindé à gauche. D'après le **corollaire 4.2.8** (1), $g : \tau N \longrightarrow M$ est irréductible. D'où l'existence d'une flèche $\tau N \longrightarrow M$.

(3) Comme, en (2), $\begin{bmatrix} f & f' \end{bmatrix} : M \oplus M' \longrightarrow N$ est minimal presque scindé à droite, d'après le **corollaire 4.2.8** (2), $g : N \longrightarrow \tau^{-1}M$ est irréductible. D'où l'existence d'une flèche $N \longrightarrow \tau^{-1}M$.

□

Comme le résultat précédent, le lemme suivant lie les flèches de Γ_A et les modules simples de $modA$:

Lemme 4.4.4. *Soit A une algèbre de dimension finie. Soient S et M deux points de Γ_A avec S simple et projectif. Alors*

(1) *Γ_A n'a aucune flèche $M \longrightarrow S$.*

(2) *Si Γ_A a une flèche $S \longrightarrow M$, alors M est projectif.*

Démonstration. (1) Puisque S simple et projectif, d'après le **corollaire 2.7.2 (1)**, $rad(M, S) = 0$. Donc il n'existe pas de morphisme irréductible $f : M \longrightarrow S$. D'où Γ_A n'a aucune flèche $M \longrightarrow S$.

(2) Si M est non-projectif, alors d'après le **lemme 4.4.3 (2)**, Γ_A a une flèche $\tau M \longrightarrow S$.

Ce qui contredit (1). Donc M est projectif.

□

Exemple 4.4.5. *Soit $A = kQ$, où Q est le carquois* $1\bullet \xrightarrow{\alpha} \bullet 2$ *. Le carquois d'Auslander-Reiten est*

$$\begin{tikzcd}
S_2 \arrow[dr] \arrow[rr, dashed, no head] & & S_1 \\
& P_1 \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

4.5 Composition de deux morphismes irréductibles

Les résultats énoncés dans cette section sont issus de [10]. Ils nous donnent une idée sur la composition de deux morphismes irréductibles.

Définition 4.5.1. *Soit Γ_A le carquois d'Auslander-Reiten de mod$A$. Un chemin $Y_0 \to Y_1 \to Y_2$ est dit **pré-sectionnel** de longueur 2 si Y_2 est non-projectif implique qu'il existe un morphisme irréductible $f : Y_0 \oplus \tau Y_2 \longrightarrow Y_1$.*

Lemme 4.5.2. *Soit $f : M \longrightarrow N$ un morphisme minimal presque scindé à droite dans mod$A$ tel que M a pour facteur direct $X_1 \oplus X_2$, où X_1 et X_2 sont indécomposables. Si X_2 est non injectif, alors Γ_A a un chemin pré-sectionel $X_1 \to N \to \tau^{-1} X_2$.*

Démonstration. Comme X_1 et X_2 sont des facteurs directs de M, d'après le **théorème 4.2.7** (2), il existe des morphismes irréductibles $f_1 : X_1 \longrightarrow N$ et $f_2 : X_2 \longrightarrow N$. Supposons que X_2 est non injectif. D'après le **lemme 4.4.3** (3), il existe une flèche $N \longrightarrow \tau^{-1} X_2$.

Par conséquent, Γ_A a un chemin $X_1 \to N \to \tau^{-1}X_2$. De plus, selon le **corollaire 4.2.8** (2), il existe un morphisme irréductible $g : X_1 \oplus X_2 \longrightarrow N$. Donc le chemin $X_1 \to N \to \tau^{-1}X_2$ est pré-sectionel.

□

Le résultat suivant est un cas particulier du résultat du lemme 2.5 de [10].

Lemme 4.5.3. *Soient $f_0 : Y_0 \longrightarrow Y_1$ et $f_1 : Y_1 \longrightarrow Y_2$ deux morphismes irréductibles entre des modules indécomposables. Si $f_1 f_0 \in rad^3(Y_0, Y_2)$, alors*

(1) *Y_2 est non projectif ;*

(2) *Si* $0 \longrightarrow \tau Y_2 \xrightarrow{\begin{bmatrix} g \\ g' \end{bmatrix}} Y_1 \oplus Y_1' \xrightarrow{[f_1 \quad f_1']} Y_2 \longrightarrow 0$ *est une suite presque scindée, alors il existe un isomorphisme $q : Y_0 \longrightarrow \tau Y_2$ dans $modA$ tel que $f_0 + gq \in rad^2(Y_0, Y_1)$ et $g'q \in rad^2(Y_0, Y_1')$.*

Démonstration. (1) On a la factorisation $f_1 f_0 = ts$ avec $(s : Y_0 \longrightarrow W) \in rad^2(Y_0, W)$ et $(t : W \longrightarrow Y_2) \in rad(W, Y_2)$. Soit $\begin{bmatrix} f_1 & f_1' \end{bmatrix} : Y_1 \oplus Y_1' \longrightarrow Y_2$ un morphisme minimal presque scindé à droite. Comme t est dans $rad(W, Y_2)$, alors il n'est pas une rétraction. Donc en appliquant la définition d'un morphisme presque scindé à droite à $\begin{bmatrix} f_1 & f_1' \end{bmatrix}$, on montre qu'il existe un morphisme $\left(\begin{smallmatrix} u \\ u' \end{smallmatrix}\right) : W \longrightarrow Y_1 \oplus Y_1'$ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} Y_1 \oplus Y_1' \arrow[r, "{[f_1 \quad f_1']}"] & Y_2 \\ & W \arrow[u, "t"'] \arrow[ul, dashed, "\begin{bmatrix} u \\ u' \end{bmatrix}"] \end{tikzcd}$$

Par conséquent t se factorise par $\begin{bmatrix} f_1 & f_1' \end{bmatrix}$. Comme $t = \begin{bmatrix} f_1 & f_1' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ u' \end{bmatrix}$, alors $\begin{bmatrix} f_1 & f_1' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} us - f_0 \\ u's \end{bmatrix} = f_1(us - f_0) + f_1' u' s = f_1 us - f_1 f_0 + f_1' u' s = ts - ts = 0$. Supposons que Y_2 est projectif, alors

(f_1, f_1') est un monomorphisme, donc non nul. D'où $\begin{bmatrix} us - f_0 \\ u's \end{bmatrix} = 0$ implique que $us - f_0 = 0$ et donc $f_0 = us \in rad^2(Y_0, Y_1)$. Ce qui est absurde. Donc Y_2 est non projectif.

(2) Supposons que la suite $0 \longrightarrow \tau Y_2 \xrightarrow{\begin{bmatrix} g \\ g' \end{bmatrix}} Y_1 \oplus Y_1' \xrightarrow{\begin{bmatrix} f_1 & f_1' \end{bmatrix}} Y_2 \longrightarrow 0$ est presque scindée. Alors $Im \begin{bmatrix} us - f_0 \\ u's \end{bmatrix} \subseteq Im \begin{bmatrix} g \\ g' \end{bmatrix}$. Donc il existe $q : Y_0 \longrightarrow \tau Y_2$ tel que $\begin{bmatrix} us - f_0 \\ u's \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g \\ g' \end{bmatrix} q$. Ainsi, $\begin{bmatrix} f_0 + gq \\ g'q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} us \\ u's \end{bmatrix} \in rad^2(Y_0, Y_1')$. Ainsi, on en déduit que $f_0 + gq = us$, et donc, $f_0 = us - gq$. Supposons que q est dans $rad(Y_0, \tau Y_2)$. Comme s est dans $rad^2(Y_0, W)$ et g est dans $rad(\tau Y_2, Y_1)$, alors f_0 est dans $rad^2(Y_0, Y_1)$. Ce qui contredit le fait que f_0 est irréductible. D'où $q \notin rad(Y_0, \tau Y_2)$. De plus Y_0 et τY_2 sont indécomposables, alors, d'après la **proposition 2.7.1** (3), q est un isomorphisme.

□

Le résultat suivant est un cas particulier de 2.7 de [10].

Proposition 4.5.4. *Soit $Y_0 \longrightarrow Y_1 \longrightarrow Y_2$ un chemin pré-sectionnel dans le carquois d'Auslander-Reiten Γ_A. Alors, il existe deux morphismes irréductibles $f_0 : Y_0 \longrightarrow Y_1$ et $f_1 : Y_1 \longrightarrow Y_2$ tels que $f_1 f_0 \notin rad^3(Y_0, Y_2)$.*

Démonstration. Comme $Y_0 \longrightarrow Y_1$ et $Y_1 \longrightarrow Y_2$ sont des flèches du carquois Γ_A, alors il existe deux morphismes irréductibles $f_0 : Y_0 \longrightarrow Y_1$ et $f_1 : Y_1 \longrightarrow Y_2$. Si $f_1 f_0$ n'est pas dans $rad^3(Y_0, Y_2)$, alors la proposition est valide. Supposons que $f_1 f_0 \in rad^3(Y_0, Y_2)$. Comme Y_0, Y_1 et Y_2 sont des points du carquois Γ_A, ils sont indécomposables. Alors, d'après le **lemme 4.5.3** (1), Y_2 est non projectif. Donc, d'après le **lemme 4.3.8**, il existe une

suite presque scindée $0 \longrightarrow \tau Y_2 \xrightarrow{\begin{bmatrix} g \\ g' \end{bmatrix}} Y_1 \oplus Y_1' \xrightarrow{\begin{bmatrix} f_1 & f_1' \end{bmatrix}} Y_2 \longrightarrow 0$. D'après le **lemme 4.5.3** (2), il existe un isomorphisme $q : Y_0 \longrightarrow \tau Y_2$ dans $modA$ tel que $f_0 + gq \in rad^2(Y_0, Y_1)$. Posons $\begin{bmatrix} h \\ h' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g \\ g' \end{bmatrix} q$. Alors $f_0 + h \in rad^2(Y_0, Y_1)$.
D'où, $f_0 + rad^2(Y_0, Y_1) = -(h + rad^2(Y_0, Y_1))$. En outre, le diagramme

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Y_0 \arrow[r, "\begin{bmatrix} h \\ h' \end{bmatrix}"] \arrow[d, "q"'] & Y_1 \oplus Y_1' \arrow[r, "\begin{bmatrix} f_1 & f_1' \end{bmatrix}"] \arrow[d, equal] & Y_2 \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \tau Y_2 \arrow[r, "\begin{bmatrix} g \\ g' \end{bmatrix}"] & Y_1 \oplus Y_1' \arrow[r, "\begin{bmatrix} f_1 & f_1' \end{bmatrix}"] & Y_2 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

est commutatif. Comme q est un isomorphisme, d'après le **lemme 4.3.7** la suite $0 \longrightarrow Y_0 \xrightarrow{\begin{bmatrix} h \\ h' \end{bmatrix}} Y_1 \oplus Y_1' \xrightarrow{\begin{bmatrix} f_1 & f_1' \end{bmatrix}} Y_2 \longrightarrow 0$ $(\star)$ est presque scindée. Considérons le morphisme minimal presque scindé à droite $\phi : M \longrightarrow Y_1$. Comme le chemin $Y_0 \longrightarrow Y_1 \longrightarrow Y_2$ est pré-sectionnel, par définition, $Y_0 \oplus \tau Y_2$ est un facteur direct de M. Comme Y_0 est isomorphe à τY_2, la somme directe $Y_0 \oplus Y_0$ est un facteur directe de M. Donc il existe un sous-module N de M tel que $\phi = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 \end{bmatrix} : Y_0 \oplus Y_0 \oplus N \longrightarrow Y_1$. Comme ϕ est irréductible, la composante $\begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 \end{bmatrix} : Y_0 \oplus Y_0 \longrightarrow Y_1$ de ϕ est irréductible. Alors, d'après la **proposition 4.1.5**, $\phi_1 + rad^2(Y_0, Y_1)$ et $\phi_2 + rad^2(Y_0, Y_1)$ sont linéairement indépendants sur $D_{Y_0} = End_A(Y_0)/rad(End_A(Y_0))$. Donc la dimension de $Irr(Y_0, Y_1)$ sur D_{Y_0} est supérieure ou égale à 2. Comme la famille libre $\{f_0 + rad^2(Y_0, Y_1)\}$ ne contient qu'un seul élément, elle n'est pas une base. Elle est donc non génératrice. D'où il existe $g_0 : Y_0 \longrightarrow Y_1$ tel que $g_0 + rad^2(Y_0, Y_1)$ n'est pas un multiple de $f_0 + rad^2(Y_0, Y_1)$ à coefficients de D_{Y_0}. Par conséquent, la famille $\{f_0 + rad^2(Y_0, Y_1), g_0 + rad^2(Y_0, Y_1)\}$ est libre sur D_{Y_0}. Supposons que $f_1 g_0 \in rad^3(Y_0, Y_2)$. En appliquant le **lemme 4.5.3** (2) à la suite presque scindée $(\star)$ ci-haut, on obtient un automorphisme $u : Y_0 \longrightarrow Y_0$ tel que $g_0 + hu$ est dans $rad^2(Y_0, Y_1)$. Alors, on a $(g_0 + hu) + rad^2(Y_0, Y_1) = 0$. C'est-à-dire,

$(g_0 + rad^2(Y_0, Y_1)) + (hu + rad^2(Y_0, Y_1)) = 0$. D'où, $g_0 + rad^2(Y_0, Y_1) = -(hu + rad^2(Y_0, Y_1))$. Donc, $g_0 + rad^2(Y_0, Y_1) = -(h + rad^2(Y_0, Y_1))(u + rad(Y_0, Y_0))$. Par conséquent, $g_0 + rad^2(Y_0, Y_1) = (u + rad^2(Y_0, Y_0))(f_0 + rad(Y_0, Y_1))$. Donc la famille $\{f_0 + rad^2(Y_0, Y_1), g_0 + rad^2(Y_0, Y_1)\}$ est liée. Ce qui est contradictoire car cette même famille libre. $\square$

CHAPITRE 5

Algèbres dont le carré du radical de la catégorie de modules est nul

Maintenant que nous avons presque tous le pré-requis, nous démontrons dans ce chapitre le résultat principal de nos recherches. Nous commençons par présenter quelques résultats nécessaires omis au chapitre précédent pour enfin, donner le résultat final.

5.1 La nécessité

Dans le chapitre 2, nous avons montré que, pour une algèbre A de dimension finie, $rad^n(modA) = 0$ si et seulement si $rad^n(X,Y) = 0$ pour tous modules indécomposables X, Y de $modA$. Dans cette section, on prend $n = 2$ pour en déduire les propriétés de l'algèbre A.

Proposition 5.1.1. *Soit A une k-algèbre de dimension finie telle que $rad^2(modA) = 0$. Si* $0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$ *est une suite presque scindée, alors Y est indécom-*

posable.

Démonstration. Supposons que $Y = Y_1 \oplus Y_2$. Posons $f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$ et $g = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \end{bmatrix}$ où $f_i = p_i f$, $g_i = gq_i$ tels que p_i sont les projections canoniques, q_i les inclusions canoniques et $i = 1, 2$. Comme $\begin{bmatrix} g_1 & g_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$, car $rad^2(modA) = 0$, et f est le noyau de g, il existe un morphisme $\phi : X \longrightarrow X$ tel que $\begin{bmatrix} f_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \phi$. Donc $f_1 = f_1\phi$ et $f_2\phi = 0$. Or f_1 est irréductible et comme f_1 n'est pas une rétraction, alors ϕ est une section. Donc, d'après **lemme 2.1.8**, ϕ est un isomorphisme. Et donc $f_2 = 0$. Ce qui est contradictoire. Alors Y est indécomposable.

□

Proposition 5.1.2. *Soit A une algèbre de dimension finie. Supposons que $rad^2(modA) = 0$. Si P est un A-module à gauche indécomposable projectif, alors $rad(P)$ est nul ou simple.*

Démonstration. En vertu de la **proposition 2.6.17**, $rad(radP) = rad^2(A)P$. Comme $rad^2(modA) = 0$, d'après la **proposition 2.8.4**, $rad^2(A) = 0$. Ce qui implique que $rad(radP) = 0$. Alors, d'après la **proposition 2.6.18**, $radP = X_1 \oplus \cdots \oplus X_n$ avec X_i des A-modules simples. Supposons que $radP$ est non nul et $n \geq 1$. Alors $radP = X_1 \oplus X_2 \oplus Y$, où Y est un module qui peut-être nul. D'après le **lemme 4.2.9** (1), $j : radP \longrightarrow P$ est minimal presque scindé à droite. Donc, d'après le **corollaire 4.2.10** (1), il existe des monomorphismes irréductibles $f_i : X_i \longrightarrow P$, $i = 1, 2$. Comme f_i n'est pas une section car irréductible, X_i, $i = 1, 2$, n'est pas injectif. Donc, d'après le **lemme 4.5.2**, $X_1 \to P \to \tau^{-1}X_2$ est un chemin pré-sectionnel. D'après la **proposition 4.5.4**, il existe des morphismes irréductibles $h_0 : X_1 \longrightarrow P$ et $h_1 : P \longrightarrow \tau^{-1}X_2$ tels que h_1h_0 n'appartient pas à $rad^3(X_1, \tau^{-1}X_2)$. En particulier, h_1h_0 est non nul. Mais, h_1h_0 appartient à

$rad^2(X_1, \tau^{-1}X_2)$, ce qui est contradictoire du fait que $rad^2(modA) = 0$. Alors, $radP$ est nul ou simple.

□

Lemme 5.1.3. *Soit A une algèbre de dimension finie telle que $rad^2(modA) = 0$. Alors tout A-module simple est projectif ou injectif.*

Démonstration. Soit S un A-module simple non projectif et non injectif. D'après le **lemme 2.7.3**, la couverture projective $p : P \to S$ est dans $rad(P, S)$ et l'enveloppe injective $j : S \to I$ dans $rad(S, I)$. Alors, jp appartient à $rad^2(P, I)$. D'où $jp = 0$. Comme p est un épimorphisme, $j = 0$. Ce qui est absurde car S est non nul et j est un monomorphisme.

□

Proposition 5.1.4. *Soit $A = kQ/I$, où Q est un carquois fini et I est un idéal admissible de kQ. Si $rad^2(modA) = 0$, alors $I = R^2$.*

Démonstration. Supposons que $rad^2(modA) = 0$. Alors d'après la **proposition 2.8.4**, $rad^2(A) = 0 + I^2$. Ce qui implique que $R^2 \subseteq I$. Or I est admissible, donc inclus dans R^2. D'où $I = R^2$.

□

Lemme 5.1.5. *Soit $A = kQ/R^2$, où Q est un carquois. Soient $a \in Q_0$ un sommet fixe et $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ les flèches commençant en a. Alors, P_a a pour k-base l'ensemble $\{e_a, \alpha_1 + R^2, \ldots, \alpha_n + R^2\}$. De plus, $radP_a$, a pour base l'ensemble $\{\alpha_1 + R^2, \ldots, \alpha_n + R^2\}$.*

Démonstration. D'après la **proposition 3.3.1** (1), P_a se compose des combinaisons linéaires de classes modulo R^2 des chemins commençant en a. Comme les classes modulo R^2 de chemins commençant en a de longueur au moins 2 sont nuls, P_a se compose des combinaisons linéaires de classes modulo R^2 de chemins commençant en a de longueur au plus 1. C'est-à-dire, P_a est engendré par la famille $\{e_a, \alpha_1 + R^2, \ldots, \alpha_n + R^2\}$. De plus, d'après le **lemme 3.2.10**, $e_a, \alpha_1 + R^2, \ldots, \alpha_n + R^2$ sont linéairement indépendants. Donc $\{e_a, \alpha_1 + R^2, \ldots, \alpha_n + R^2\}$ est une k-base de P_a.

□

Proposition 5.1.6. *Soit $A = kQ/I$, où I est un idéal admissible, telle que $rad^2(modA) = 0$. Pour tout point a de Q, il existe au plus une flèche commençant en a et au plus une flèche se terminant en a.*

Démonstration. Considérons le A-module projectif indécomposable à gauche $P_a = Ae_a$, avec $a \in Q_0$. Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ les flèches commençant en a. D'après le **lemme 5.1.5**, $radP_a$ a pour k-base $\{\alpha_1 + R^2, \ldots, \alpha_s + R^2\}$. De l'autre coté, d'après la **proposition 5.1.2**, $radP_a$ est simple. Ainsi, en vertu du **lemme 3.3.3**, $radP_a \cong S_b$. Donc, d'après la **proposition 3.3.2** (1), $radP_a$ est de dimension 1. D'où, $s = 1$.
Dualement, d'après la **proposition 2.9.4**, $rad^2(modA^{op}) = 0$. Comme $A^{op} = kQ^{op}/I^{op}$, si $\beta_1, \ldots, \beta_t$ sont les flèches de Q se terminant en a, alors $\beta_1^{op}, \ldots, \beta_t^{op}$ sont les flèches de Q^{op} commençant en a. D'où, $t = 1$.

□

Proposition 5.1.7. *Soit $A = kQ/I$, où Q est un carquois connexe et I un idéal admissible de kQ. Si $rad^2(modA) = 0$, alors Q se compose d'un point, ou bien d'une flèche entre deux points distincts.*

Démonstration. Supposons que Q a un chemin $a \to b \to c$. Soit S_b le A-module simple associé au point b. D'après la **proposition 3.3.4**, S_b est non projectif et non injectif. Ce qui est absurde car, d'après le **lemme 5.1.3**, tout A-module simple est projectif ou injectif. Donc ce chemin n'existe pas et en particulier, si $a = b = c$, il n'existe aucune boucle dans Q. De plus, d'après la **proposition 5.1.6**, tout point de Q est la source d'au plus une flèche et est le but d'au plus d'une flèche. Ainsi, le carquois Q se compose d'un point, ou bien d'une flèche entre deux points distincts puisqu'il est connexe. $\square$

5.2 Le résultat principal

Dans le but d'énoncer le résultat principal de ce mémoire, nous commençons par quelques résultats qui simplifieront la preuve du théorème final.

Lemme 5.2.1. *Soit $A = kQ$, où Q est le carquois $1\bullet \xrightarrow{\alpha} \bullet 2$. Considérons l'inclusion canonique $j : radP_1 \longrightarrow P_1$ et la projection canonique $p : P_1 \longrightarrow S_1$. Alors*

(1) $Hom_A(radP_1, P_1) = k\langle j\rangle$.

(2) $Hom_A(P_1, S_1) = k\langle p\rangle$.

(3) $rad(S_1, M) = 0$, *pour tout A-module M.*

(4) P_1 *est injectif.*

Démonstration. (1) Soit $f \in Hom_A(radP_1, P_1)$ un morphisme $A-linaire$. Comme $\{\varepsilon_1, \alpha\}$ est une base de P_1, $f(\alpha) = t_1\varepsilon_1 + t_2\alpha$, $t_1, t_2 \in k$. On a $\alpha = \varepsilon_2\alpha$. Donc $f(\alpha) = f(\varepsilon_2\alpha) = \varepsilon_2 f(\alpha)$. Alors $t_1\varepsilon_1 + t_2\alpha = \varepsilon_2 f(\alpha) = t_1\varepsilon_2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 t_2\alpha = 0 + t_2\alpha$. Ce qui implique que $t_1 = 0$. D'où $f(\alpha) = t_2\alpha$. Soit u dans $radP_1$. Comme $\{\alpha\}$ est une base de $radP_1$, $u = \lambda\alpha$, où $\lambda \in k$. Donc $f(u) = f(\lambda\alpha) = \lambda f(\alpha) = \lambda t_2\alpha = t_2\lambda\alpha = t_2 u = (t_2\mathrm{id})(u)$. Donc $f = t_2\mathrm{id}$.

(2) Soit $g : P_1 \longrightarrow S_1$ la projection canonique. Comme $\{\varepsilon_1, \alpha\}$ est une base de P_1 et $\{\varepsilon_1 + radP_1\}$ une base de S_1, on a $g(\varepsilon_1) = \lambda\varepsilon_1 + radP_1$, où $\lambda \in k$ et $g(\alpha) = g(\alpha\varepsilon_1) = \alpha g(\varepsilon_1) = \alpha(\lambda\varepsilon_1 + radP_1) = \lambda\alpha + radP_1 = 0 + radP_1$ car α n'est pas dans S_1. De plus tout u dans P_1 s'écrit $u = t_1\varepsilon_1 + t_2\alpha$, où $t_1, t_2 \in k$. Donc $g(u) = t_1 g(\varepsilon_1) + t_2 g(\alpha) = t_1\lambda\varepsilon_1 + radP_1 = \lambda(t_1\varepsilon_1 + radP_1) = \lambda p(u)$. D'où $g = \lambda p$.

(3) Soit $f : S_1 \longrightarrow M$ un morphisme non nul dans $rad(S_1, M)$ représenté par le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} k \arrow[r] \arrow[d, "f_1"] & 0 \arrow[d, "f_2"] \\ M_1 \arrow[r, "\rho_\alpha"] & M_2 \end{tikzcd}$$

Posons $u_1 = f_1(1) \in M_1$. Supposons que $u_1 = 0$. Alors, pour $\lambda \in k$, on a $f_1(\lambda) = \lambda f_1(1) = 0$. Donc $f_1 = 0$. Ainsi, $f = 0$, car $f_2 = 0$. Ce qui est absurde. D'où $u_1 \neq 0$ et donc la famille $\{u_1\}$ est libre. Comme M_1 est de dimension finie, la famille libre $\{u_1\}$ est contenue dans une base $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ de M_1. Considérons l'application linéaire

$$\begin{array}{cccc} g_1 & : & M_1 & \longrightarrow & k \\ & & \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i u_i & \longmapsto & \lambda_1 \end{array}$$

Ainsi, pour tout $\lambda \in k$, $g_1 f_1(\lambda) = g_1(f_1(\lambda)) = g_1(\lambda f_1(1)) = g_1(\lambda u_1) = \lambda$. Donc $g_1 f_1 = \mathrm{id}_k$. Posons $g_2 = 0$ et soit $g : M \longrightarrow S_1$ un morphisme dont la représentation est :

$$\begin{tikzcd} M_1 \arrow[r, "\rho_\alpha"] \arrow[d, "g_1"] & M_2 \arrow[d, "g_2"] \\ k \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Alors $gf = \mathrm{id}_{S_1}$. Comme f est dans $rad(S_1, M)$, $\mathrm{id}_{S_1} - gf = 0$ est inversible. Ce qui est absurde. Donc $rad(S_1, M) = 0$, pour tout A-module M.

(4) Soit $f : P_1 \longrightarrow M$ un monomorphisme représenté par le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} k \arrow[r, "1"] \arrow[d, "f_1"] & k \arrow[d, "f_2"] \\ M_1 \arrow[r, "\rho_\alpha"] & M_2 \end{tikzcd}$$

Alors f_1 et f_2 sont tous non nuls. Ainsi, $u_1 = f_1(1) \in M_1$ et $v_1 = f_2(1) \in M_2$ sont non nuls. Comme $Im(\rho_\alpha)$ est de dimension finie, la famille libre $\{v_1\}$ est contenue dans une base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ de $Im(\rho_\alpha)$. De même, la famille libre $\{v_1, \ldots, v_n\}$ est contenue dans une base $\{v_1, \ldots, v_n, v_{n+1}, ..., v_m\}$ de M_2. Puisque les v_i sont dans $Im(\rho_\alpha)$, alors $v_i = \rho_\alpha(u_i)$, $i = 1, \ldots, n$. Prenons une base $\{w_1, \ldots, w_p\}$ de $Ker(\rho_\alpha)$ et supposons que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i + \sum_{j=1}^{p} \mu_j w_j = 0$, où $\lambda_i, \mu_j \in k$. Alors $\rho_\alpha(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i + \sum_{j=1}^{p} \mu_j w_j) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \rho_\alpha(u_i) + \sum_{j=1}^{p} \mu_j \rho_\alpha(w_j) = 0$. Or $\rho_\alpha(w_j) = 0$. Donc $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \rho_\alpha(u_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0$. Alors $\lambda_i = 0$, car la famille $\{v_1, \ldots, v_n\}$ est libre. Ainsi, l'équation $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i + \sum_{j=1}^{p} \mu_j w_j = 0$ devient $\sum_{j=1}^{p} \mu_j w_j = 0$. Et donc, $\mu_j = 0$ car la famille $\{w_1, \ldots, w_p\}$ est libre. Par conséquent, $\{u_1, \ldots, u_n, w_1, ..., w_p\}$ est libre. Soit $u \in M_1$. Alors, dans $Im(\rho_\alpha)$, $\rho_\alpha(u) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \rho_\alpha(u_i) = \rho_\alpha(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i)$. Donc $\rho_\alpha(u - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i) = 0$. D'où $u - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$ est dans $Ker(\rho_\alpha)$. Par conséquent, $u - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = \sum_{j=1}^{p} \mu_j w_j$. Ce qui implique que $u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i + \sum_{j=1}^{p} \mu_j w_j$. Donc la famille $\{u_1, \ldots, u_n, w_1, ..., w_p\}$ est une base de M_1. Il existe donc les applications linéaires

$$\begin{array}{cccc} g_1 : & M_1 & \longrightarrow & k \\ & \sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i & \longmapsto & \lambda_1 \end{array}$$

et

$$\begin{array}{cccc} g_2 : & M_2 & \longrightarrow & k \\ & \sum_{t=1}^{m} \gamma_t v_t & \longmapsto & \gamma_1 \end{array}$$

Pour tout u dans M_1, on a $(g_2\rho_\alpha - g_1)(u) = g_2\rho_\alpha(u) - g_1(u) = g_2(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i) - \lambda_1 = \lambda_1 - \lambda_1 = 0$. D'où $g_2\rho_\alpha = g_1$. Donc $g = (g_1, g_2)$ est un morphisme. Ainsi, pour tout $\lambda \in k$, $g_1 f_1(\lambda) =$

$g_1(f_1(\lambda)) = g_1(\lambda f_1(1)) = g_1(\lambda u_1) = \lambda$ et $g_2 f_2(\lambda) = g_2(f_2(\lambda)) = g_2(\lambda f_2(1)) = g_2(\lambda v_1) = \lambda$. Donc $g_1 f_1 = \mathrm{id}_k$ et $g_2 f_2 = \mathrm{id}_k$. D'où $gf = \mathrm{id}_{P_1}$. Ce qui prouve que f est une section et donc P_1 est injectif.

□

Lemme 5.2.2. *Soit $A = kQ$, où Q est le carquois $1\bullet \xrightarrow{\alpha} \bullet 2$. Considérons l'inclusion $j : radP_1 \longrightarrow P_1$ et la projection $p : P_1 \longrightarrow S_1$. Alors*

(1) *$radP_1 \cong P_2 = S_2$.*

(2) *j est minimal presque scindé à gauche.*

(3) *p est minimal presque scindé à gauche.*

(4) *$rad^2(radP_1, P_1) = 0$.*

(5) *$rad^2(P_1, S_1) = 0$.*

Démonstration. (1) On a $P_1 = k < \varepsilon_1, \alpha >$, $P_2 = k < \varepsilon_2 >$ et $radP_1 = k < \alpha >$. Par définition, le A-module simple S_2 est donné par $S_2 = P_2/radP_2 = k < \varepsilon_2 >= P_2$ car $radP_2 = 0$. De plus l'application

$$\begin{array}{cccc} f : & P_2 & \longrightarrow & radP_1 \\ & \lambda\varepsilon_2 & \longmapsto & \lambda\alpha \end{array}$$

est un isomorphisme. Donc $radP_1 \cong P_2 = S_2$.

(2) Comme $radP_1$ est indécomposable, d'après le **corollaire 4.3.4** (2), il existe un morphisme minimal presque scindé à gauche $g : radP_1 \longrightarrow M$. Alors, comme j n'est pas une section, il existe un morphisme $p : M \longrightarrow P_1$ tel que $j = pg$. D'après le **lemme 4.2.9** (1), j est minimal presque scindé à droite. Il est non nul, donc irréductible. D'où p est une rétraction. Donc la suite exacte $0 \longrightarrow kerp \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} P_1 \longrightarrow 0$ est scindée. Ainsi, $M \cong kerp \oplus P_1$. Supposons que p n'est pas un monomorphisme. Alors $kerp = N \oplus L$, où N est indécomposable. Ainsi, $M \cong P_1 \oplus N \oplus L$. D'après le **corollaire**

4.2.8 (1), il existe un morphisme irréductible $h = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} : radP_1 \longrightarrow P_1 \oplus N$. D'après le **lemme 4.3.5**, $h_2 : radP_1 \longrightarrow N$ est irréductible. Comme $radP_1 \cong P_2 = S_2$, d'après le **lemme 4.4.4** (2), N est projectif. Mais P_1 et P_2 sont les seuls modules projectifs indécomposables et d'après le **lemme 4.4.3** (2) N n'est pas isomorphe à P_2. Donc $N \cong P_1$. D'après le **lemme 4.1.2** (1), on peut supposer que $M = P_1 \oplus P_1 \oplus L$. Ainsi, on a un morphisme irréductible $\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} : radP_1 \longrightarrow P_1 \oplus P_1$. Donc d'après la **proposition 4.1.5** (2) , $h_1 + rad^2(radP_1, P_1)$ et $h_2 + rad2(radP_1, P_1)$ sont linéairement indépendants sur $D_{P_1} = End_A(P_1)/rad(End_A(P_1))$. Or, d'après la **proposition 3.3.5** (2), $D_{P_1} = k\langle id\rangle/rad(k\langle id\rangle) = k$. Ce qui implique que $h_1 + rad^2(radP_1, P_1)$ et $h_2 + rad^2(radP_1, P_1)$ sont linéairement indépendants sur k. Mais, d'après le **lemme 5.2.1** (1), $h_i = \lambda_i j$, où $\lambda_i \in k$, $i = 1, 2$. Et par conséquent, $h_1 + rad^2(radP_1, P_1)$ et $h_2 + rad^2(radP_1, P_1)$ sont linéairement dépendants. Ce qui est absurde. Donc p est un monomorphisme. Comme g est minimal presque scindé à gauche et p est un isomorphisme, d'après le **lemme 4.2.6** (1), j est minimal presque scindé à gauche.

(3) Comme $ker(p) = radP_1 = k < \alpha >$, p n'est pas une section. Soit un morphisme $f : P_1 \longrightarrow M$ qui n'est pas une section. Puisque, d'après le **lemme 5.2.1** (4), P_1 est injectif, f n'est pas un monomorphisme. Donc il existe $u = \lambda\varepsilon_1 + \mu\alpha$ non nul dans P_1 tel que $f(u) = 0$ et donc λ et μ ne sont pas tous les deux nuls.

si $\lambda = 0$ et $\mu \neq 0$, $f(u) = f(\mu\alpha) = \mu f(\alpha) = 0$. Donc $f(\alpha) = 0$;

si λ est non nul. On a $\varepsilon_1 u = \varepsilon_1\lambda\varepsilon_1 + \varepsilon_1\mu\alpha = \lambda\varepsilon_1$. D'où $f(\varepsilon_1) = 0$. Et donc $f(\alpha\varepsilon_1) = \alpha f(\varepsilon_1) = f(\alpha) = 0$.

Comme la projection $p : P_1 \longrightarrow S_1$ est le co-noyau de $j : radP_1 \longrightarrow P_1$ et que $fj = 0$, en appliquant la définition du co-noyau, il existe $h : S_1 \longrightarrow M$ tel que $hp = f$. Alors p est presque scindé à gauche.

Soit h dans $End(S_1)$ tel que $hp = p$. Or d'après la **proposition 3.3.5** (1), $h = \lambda \mathrm{id}_{S_1}$, où

λ est non nul dans k. Donc h est un automorphisme. Alors p est minimal à gauche. Par conséquent, p est minimal presque scindé à gauche.

(4) Soit $f \in rad^2(radP_1, P_1) \subseteq Hom_A(radP_1, P_1)$. Alors d'après le **lemme 5.2.1** (1), $f = \lambda j$, où $\lambda \in k$. Or, d'après (2), $j : radP_1 \longrightarrow P_1$ est minimal presque scindé à gauche. Et donc irréductible, en vertu du **théorème 4.2.3** (2). Ainsi, d'après le **lemme 4.1.4**, $j \notin rad^2(radP_1, P_1)$. D'où, $j + rad^2(radP_1, P_1)$ est non nul dans $Irr(radP_1, P_1)$. Si $\lambda \neq 0$, alors $\lambda j + rad^2(radP_1, P_1) \neq 0$. Donc $\lambda j = f \notin rad^2(radP_1, P_1)$. Ce qui est absurde. D'où $\lambda = 0$ et donc $f = 0$. Par conséquent, $rad^2(radP_1, P_1) = 0$.

(5) Soit $g \in rad^2(P_1, S_1) \subseteq Hom_A(P_1, S_1)$. Alors d'après le **lemme 5.2.1** (2), $g = \mu p$, où $\mu \in k$. Or, selon (3), $p : P_1 \longrightarrow S_1$ est minimal presque scindé à droite. Et donc irréductible, d'après le **théorème 4.2.3** (1). Ainsi, en vertu du **lemme 4.1.4**, $p \notin rad^2(P_1, S_1)$. D'où, $p + rad^2(P_1, S_1)$ est non nul dans $Irr(P_1, S_1)$. Si $\mu \neq 0$, alors $\mu p + rad^2(P_1, S_1) \neq 0$. Donc $\mu p = g \notin rad^2(P_1, S_1)$. Ce qui est absurde. D'où $\mu = 0$ et donc $g = 0$. Par conséquent, $rad^2(P_1, S_1) = 0$.

$\square$

Lemme 5.2.3. *Soit $A = kQ$, où Q est le carquois $1\bullet \xrightarrow{\alpha} \bullet 2$. Alors le carquois d'Auslander-Reiten est*

$$\begin{tikzcd} S_2 \arrow[rr, dashed, no head] \arrow[dr] & & S_1 \\ & P_1 \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

avec $\tau S_1 = S_2$.

Démonstration. D'après le **lemme** 5.2.2 (5), $rad^2(P_1, S_1) = 0$. Donc $dim(Irr(P_1, S_1)) = dim(k < p >) = 1$. Alors, il existe une et une seule flèche $\alpha : P_1 \to S_1$. De même, d'après le **lemme** 5.2.2 (4), $dim(Irr(S_2, P_1)) = dim(k < j >) = 1$. Alors, il existe une et une seule flèche $\beta : S_2 \to P_1$. Comme la suite $0 \longrightarrow radP_1 \xrightarrow{j} P_1 \xrightarrow{p} S_1 \longrightarrow 0$ est presque scindée, $radP_1 \cong \tau S_1$. Or $radP_1 \cong S_2$. Donc $S_2 \cong \tau S_1$.

D'après le **lemme** 5.2.1 (3), $rad(S_1, M) = 0$, pour tout A-module M. D'où $Irr(S_1, M) = 0$. Donc il n'y a aucune flèche commençant en S_1. Supposons qu'il existe une flèche $\alpha' : M \to S_1$. Comme $p : P_1 \longrightarrow S_1$ est un morphisme minimal presque scindé à droite, d'après le **lemme** 4.4.2 (1), $P_1 \cong M \oplus M'$. Or P_1 est indécomposable, donc $M' = 0$. D'où $P_1 \cong M$. Comme α est la seule flèche de P_1 vers S_1, on a $\alpha' = \alpha$.

Puisque S_2 et projectif, d'après le **corollaire** 2.7.2 (1), $rad(M, S_2) = 0$, pour tout A-module M. Donc il n'y a aucune flèche se terminant en S_2. S'il existe une flèche $\beta' : S_2 \to N$. Comme $j : S_2 \longrightarrow P_1$ est un morphisme minimal presque scindé à gauche, d'après le **lemme** 4.4.2 (2), $P_1 \cong N \oplus N'$. Or P_1 est indécomposable, donc $N' = 0$. D'où $P_1 \cong N$. Comme β est la seule flèche de S_2 vers P_1, on a $\beta' = \beta$.

S'il existe une flèche $\delta : X \to P_1$. Comme $j : S_2 \longrightarrow P_1$ est un morphisme minimal presque scindé à droite, d'après le **lemme** 4.4.2 (1), $S_2 \cong X \oplus X'$. Or P_1 est indécomposable, donc $X' = 0$. D'où $P_1 \cong X$. Comme β est la seule flèche de S_2 vers P_1, on a $\delta = \beta$. Supposons qu'il existe une flèche $\sigma : P_1 \to Y$. Comme $p : P_1 \longrightarrow S_1$ est un morphisme minimal presque scindé à gauche, d'après le **lemme** 4.4.2 (2), $S_1 \cong Y \oplus Y'$. Or S_1 est indécomposable, donc $Y' = 0$. D'où $S_1 \cong Y$. Comme α est la seule flèche de P_1 vers S_1, on a $\sigma = \alpha$.

Supposons que M est un A-module indécomposable non isomorphe à aucun des A-modules S_1, P_1, S_2. Soit $\pi : P' \longrightarrow M$ la couverture projective de M. D'après le **théorème 2.5.2**, $P' = P'_1 \oplus \cdots \oplus P'_n$, où les P'_i sont indécomposables pour tout $1 \leq i \leq n$. Comme P' est projectif, les P'_i sont projectifs. Ainsi $f = [f_1 \ldots f_n]$, où $f_i : P'_i \longrightarrow M$ ne sont pas tous nuls. Alors il existe $1 \leq s \leq n$ tel que le morphisme $f_s : P'_s \longrightarrow M$ est non nul. Posons $P = P'_s$ qui est indécomposable projectif et $f = f_s : P \longrightarrow M$ qui est non nul. Comme P et M sont indécomposables et f n'est pas un isomorphisme, d'après la **proposition 2.7.1** (3), f est dans $rad(P, M)$ et donc, d'après la **proposition 2.7.1** (1), f n'est pas une section. Puisque P_1 et P_2 sont les seuls modules projectifs indécomposables dans $modA$, $P \cong P_1$ ou $P \cong P_2$.

Si $P = P_1$. Comme la projection $p : P_1 \longrightarrow S_1$ est minimal presque scindé à gauche et $f : P_1 \longrightarrow M$ n'est pas une section, il existe $u : S_1 \longrightarrow M$ tel que $f = up$. De plus M n'est pas isomorphe à S_1, d'après la **proposition 2.7.1** (3), u est dans $rad(S_1, M)$. Or, d'après le **lemme 5.2.1** (3), $rad(S_1, M) = 0$. Donc $f = up = 0$. Ce qui est absurde.

Si $P = P_2 = radP_1$. Comme l'inclusion $j : radP_1 \longrightarrow P_1$ est minimal presque scindé à gauche et $f : P_2 \longrightarrow M$ n'est pas une section, il existe $v : P_1 \longrightarrow M$ tel que $f = vj$, $v \neq 0$. De plus M n'est pas isomorphe à P_1, d'après la **proposition 2.7.1** (3), v est dans $rad(P_1, M)$. De même, comme $v : P_1 \longrightarrow M$ n'est pas une section et $p : P_1 \longrightarrow S_1$ est min presque scindé à gauche, il existe $v' : S_1 \longrightarrow M$ tel que $v = v'p$. Mais M n'est pas isomorphe à S_1, d'après la **proposition 2.7.1** (3), v' est dans $rad(S_1, M)$ qui est nul. C'est absurde car v est non nul.

Par conséquent, P_1, P_2 et S_1 sont les seuls modules indécomposables à isomorphisme près dans $modA$.

□

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer et de prouver le résultat principal de nos recherches :

Théorème 5.2.4. *Soit $A = kQ/I$, où Q est un carquois connexe et I un idéal admissible de kQ. Alors $rad^2(modA) = 0$ si et seulement si Q se compose d'un point, ou bien se compose d'une flèche entre deux points distincts.*

Démonstration. Nécessité. Supposons que $rad^2(modA) = 0$. Alors, d'après la **proposition 5.1.7**, le carquois Q se compose d'un point, ou bien d'une flèche entre deux points distincts.

Suffisance. Supposons que Q se compose d'un seul point. Alors, $kQ \cong k\langle\varepsilon_1\rangle \cong k$. Donc $rad(modA) = 0$. Par conséquent, $rad^2(modA) = 0$.

Supposons que Q est le carquois $1\bullet \xrightarrow{\alpha} \bullet 2$ composé d'une flèche entre deux points distincts. D'après la **proposition 2.8.3**, il suffit de vérifier que $rad^2(M, N) = 0$ pour tous modules indécomposables M, N de $modA$. Or, d'après le **lemme 5.2.3**, S_2, P_1 et S_1 sont les seuls modules indécomposables de $modA$. Ainsi, M et N sont isomorphes à l'un de ces modules indécomposables.

Soit f un morphisme dans $rad(M, M)$. D'après la **proposition 3.3.5**, $f = \lambda id$, avec $\lambda \in k$. Si λ est non nul, alors f est un isomorphisme, absurde. Donc, $\lambda = 0$, et donc, $f = 0$. Ceci montre que $rad(M, M) = 0$. Par conséquent, $rad^2(M, M) = 0$.

Comme S_2 est projectif simple, D'après le **corollaire 2.7.2** (1), $rad(M, S_2) = 0$. Donc $rad^2(S_1, S_2) = rad^2(P_1, S_2) = 0$.

Comme $S_2 \cong radP_1$, d'après le **lemme 5.2.2** (4), $rad^2(S_2, P_1) = 0$. Soit $f \in rad^2(S_2, S_1)$. Alors $f = gh$, où $g \in rad(L, S_1)$, $h \in rad(S_2, L)$ et $L \in modA$.Comme $j : S_2 \longrightarrow P_1$ est minimal presque scindé à gauche, il existe $u : P_1 \longrightarrow L$ tel que $h = uj$. Comme $p : P_1 \longrightarrow S_1$ est minimal presque scindé à droite, il existe $v : L \longrightarrow P_1$ tel que $g = pv$. Ainsi $f = gh = pvuj$. Mais vu est dans $End_A(P_1)$. D'après la **proposition 3.3.5** (2), $vu = \lambda \mathrm{id}_{P_1}$, avec $\lambda \in k$. Donc, $f = gh = pvuj = p\lambda \mathrm{id}_{P_1} j = \lambda pj = 0$. Par conséquent, $rad^2(S_2, S_1) = 0$

D'après le **lemme 5.2.2** (5), $rad^2(P_1, S_1) = 0$. Enfin, d'après le **lemme 5.2.1** (3), $rad(S_1, M) = 0$, pour tout M. Donc $rad^2(S_1, P_1) = 0$.

□

CONCLUSION

Dans ce mémoire, nous avons classifié les algèbres A de dimension finie dont le carré du radical de la catégorie des modules, $rad^2(modA)$, est nul.

Après avoir introduit le concept d'idéal dans une catégorie k-linéaire, nous avons vu au chapitre 2 que, pour une k-algèbre A de dimension finie, $rad(modA) = 0$ si et seulement si, A est semi-simple.

Puis nous avons montré au chapitre 5 que, pour une algèbre $A = kQ/I$, où Q est un carquois connexe et I un idéal admissible de kQ, $rad^2(modA) = 0$, si et seulement si Q se compose d'un point, ou d'une flèche entre deux points distincts.

Partant de ce dernier résultat, il est tout à fait logique de chercher à savoir se qui se passe dans le cas où $rad^n(modA) = 0$, pour $n \geq 3$.

Bibliographie

[1] Ibrahim Assem. *Algèbres et modules : cours et exercices*. Masson Paris, 1997.

[2] Ibrahim Assem and Flávio Ulhoa Coelho. *Basic Representation Theory of Algebras*. Springer, 2020.

[3] Ibrahim Assem, Daniel Simson, and Andrzej Skowronski. *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras : Volume 1 : Techniques of Representation Theory*. Cambridge University Press, 2006.

[4] Raymundo Bautista. *Irreducible morphisms and the radical of a category. An. Inst. Mat. Univ. Nac. Autónoma México*, 22(1983) :83–135, 1982.

[5] Ales Bouhada, Min Huang, and Shiping Liu. *Koszul duality for non-graded derived categories. arXiv preprint arXiv :1908.06153*, 2019.

[6] Claudia Chaio and Shiping Liu. *A note on the radical of a module category. Communications in Algebra*, 41(12) :4419–4424, 2013.

[7] Manabu Harada and Youshin Sai. *On categories of indecomposable modules. Osaka Journal of Mathematics*, 7(2) :323–344, 1970.

[8] Marion Henry. *Calcul de la puissance annulatrice du radical à partir du carquois ordinaire, Maîtrise, Université de Sherbrooke*, 2015.

[9] Otto Kerner and Andrzej Skowroński. *On module categories with nilpotent infinite radical. Compositio Mathematica*, 77(3) :313–333, 1991.

[10] Shiping Liu. *Auslander-Reiten theory in a Krull-Schmidt category. Sao Paulo Journal of Mathematical Sciences*, 4(3) :425–472, 2010.

[11] Ralf Schiffler. *Quiver* R*epresentations.* Springer, 2014.

[12] Ross Street. *Ideals, radicals, and structure of additive categories. Applied Categorical Structures*, 3(2) :139–149, 1995.